



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2018
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 2 : L'arithmétique (3 pts)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (7,5 pts)

EXERCICE 5 : L'analyse (2,5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle O et d'unité la matrice I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose la matrice suivante :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x + 2y \end{pmatrix}$$

Et on considère l'ensemble suivant :

$$E = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

0,25 pts

(1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

0,25 pts

(2) (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0,5 pts

(b) On pose $J = M(0, 1)$. Montrer que (I, J) est une base de l'espace vectoriel réel $(E, +, \cdot)$.

0,5 pts

(3) (a) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,5 pts

(b) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

(4) Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \varphi(x + iy) = M(x + y, -y)$$

0,5 pts

(a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,5 pts

(b) On pose : $E^* = E \setminus \{O\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

0,25 pts

(c) En déduire que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif.

0,25 pts

(5) Montrer que $(E, +, \times)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 2 : (3 pts)

Soit p un nombre premier tel que :

$$p = 3 + 4k, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

0,5 pts

(1) Montrer que pour tout entier relatif x , si :

$$x^2 \equiv 1 [p] \quad \text{alors} \quad x^{p-5} \equiv 1 [p]$$

(2) Soit x un entier relatif vérifiant :

$$x^{p-5} \equiv 1 [p]$$

0,5 pts

(a) Montrer que x et p sont premiers entre eux.

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$x^{p-1} \equiv 1 [p]$$

0,5 pts

(c) Vérifier que :

$$2 + (k - 1)(p - 1) = k(p - 5)$$

0,5 pts

(d) En déduire que :

$$x^2 \equiv 1 [p]$$

0,5 pts

(3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation :

$$x^{62} \equiv 1 [67]$$

EXERCICE 3 : (3,5 pts)

Soit m un nombre complexe.

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que $\Delta = (im - 2i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_m) .

0,5 pts

(b) Donner, suivant les valeurs de m , l'ensemble des solutions de l'équation (E_m) .

0,5 pts

(2) Pour $m = i\sqrt{2}$, écrire les deux racines de l'équation (E_m) sous la forme exponentielle.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A , Ω , M et M' d'afixes respectifs :

$$a = -1 - i, \quad \omega = i, \quad m, \quad m' = -im - 1 + i$$

0,25 pts

(1) Soit R la rotation d'angle $-\pi/2$ qui transforme M en M' .

0,5 pts

(a) Vérifier que Ω est le centre de R .

0,5 pts

(b) Déterminer l'afixe b de B , où B est le point tel que : $A = R(B)$.

(2) (a) Vérifier que :

$$m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$$

0,5 pts

(b) En déduire que les points A , M et M' sont alignés si et seulement si les points A , B , Ω et M sont cocycliques.

0,5 pts

(c) Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A , M et M' soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

EXERCICE 4 : (7,5 pts)**Partie I :**

0,5 pts

(1) (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\int_0^x \frac{t}{1+t} dt = x - \ln(1+x)$$

0,5 pts

(b) En utilisant le changement de variable $u = t^2$, montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{1}{1+u} du$$

0,5 pts

(c) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

0,25 pts

(2) Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

Partie II :On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x) & \text{Si } x \neq 0 \\ 1 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

Et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 pts

(1) (a) Montrer que f est continue à droite en 0.

0,5 pts

(b) Montrer que f est dérivable à droite en 0. (On pourra utiliser le résultat de la **Question (2)** de la **Partie I**)

0,75 pts

(c) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

0,25 pts

(b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

0,25 pts

(c) Vérifier que : $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$.

0,5 pts

- (3) Représenter graphiquement la courbe (C) . On construira la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0.

Partie III :

- (1) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x$$

0,5 pts

- (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

0,5 pts

- (b) En déduire que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ puis montrer que :

$$g(]0, +\infty[) =]-\infty, 1[$$

0,25 pts

- (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $]0, +\infty[$.

- (2) Soit a un réel de l'intervalle $]0, +\infty[$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

0,25 pts

- (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

0,5 pts

- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

0,5 pts

- (c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$$

0,25 pts

- (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

EXERCICE 5 : (2,5 pts)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

0,5 pts

- (1) Montrer que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0,5 pts

- (2) (a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, F(x) \geq x$. Et en déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

0,5 pts

- (b) Montrer que F est impaire, en déduire : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

0,5 pts

- (c) Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

0,5 pts

- (d) Montrer que la bijection réciproque G de la fonction F est dérivable en 0, puis calculer $G'(0)$.