

EXERCICE 1 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle O et d'unité la matrice I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif. On la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la matrice $M(a, b)$:

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

0,5 pts

(1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.

0,5 pts

(2) On définit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad M(a, b)TM(c, d) = M(a, b) \times A \times M(c, d)$$

Vérifier que E est stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), T)$.

0,75 pts

(3) Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ dans E qui à tout nombre complexe non nul $a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, fait correspondre la matrice $M(a, b)$ de E .

(a) Vérifier que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers (E, T) et que :

$$\varphi(\mathbb{C}^*) = E^* \quad (\text{Où } E^* = E \setminus \{M(0, 0)\})$$

0,75 pts

(b) En déduire que (E^*, T) est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre J .

0,5 pts

(4) (a) Montrer que la loi de composition interne T est distributive par rapport à la loi de composition interne $+$ dans E .

0,5 pts

(b) En déduire que $(E, +, T)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 2 : (3,5 pts)

Soit m un nombre complexe non nul.

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : 2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$$

0,5 pts

(1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = (2im)^2$.

0,5 pts

(2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On suppose que : $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$, et on pose :

$$z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$$

On considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives $1, i, m, z_1$ et z_2 .

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que : $z_1 = iz_2 + 1$.

0,5 pts

(b) Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre le point Ω d'affixe :

$$\omega = \frac{1+i}{2}$$

et d'angle de mesure $\pi/2$.

0,5 pts

(2) (a) Vérifier que :

$$\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m - 1}{m - i}$$

0,5 pts

(b) Montrer que si les points M, M_1 et M_2 sont alignés alors M appartient au cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.

0,75 pts

(c) Déterminer l'ensemble des points M pour que les points Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques.

On pourra remarquer que :

$$\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$$

EXERCICE 3 : (3 pts)

On admet que 2017 est un nombre premier, et que : $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$.

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5.

(1) Soit le couple (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que :

$$px + y^{p-1} = 2017$$

0,25 pts

(a) Vérifier que : $p < 2017$.

0,5 pts

(b) Montrer que p ne divise pas y .

0,75 pts

(c) Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1 [p]$, et en déduire que p divise 2016.

0,5 pts

(d) Montrer que : $p = 7$.

1 pts

(2) Déterminer, suivant les valeurs de p , les couples (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$px + y^{p-1} = 2017$$

EXERCICE 4 : (10 pts)**Partie I :**On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-1/x} & \text{Si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prend : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm.

0,25 pts

(1) (a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

0,5 pts

(b) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

0,5 pts

(c) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x dans $]0, +\infty[$.

0,5 pts

(2) (a) Calculer la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pts

(b) Donner le tableau de variation de la fonction f .

0,75 pts

(3) (a) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

0,5 pts

(b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. (On prend : $f(1) \simeq 0,7$ et $4e^{-3} \simeq 0,2$)**Partie II :**On considère la fonction numérique F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_x^1 f(t) dt$$

0,25 pts

(1) Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,5 pts

(2) (a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \int_x^1 e^{-1/t} dt = e^{-1} - xe^{-1/x} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-1/t} dt$$

0,25 pts

(b) Déterminer : $\forall x \in]0, +\infty[,$

$$\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} dt$$

0,5 pts

(c) Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)dt = e^{-1}$$

0,5 pts

(3) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations : $x = 0, x = 2$ et $y = 0$.(4) On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_n = F(n) - F(n+2)$$

0,5 pts

(a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel n , il existe un réel v_n de l'intervalle $]n, n+2[$ tel que :

$$u_n = 2 \left(1 + \frac{1}{v_n} \right) e^{-1/v_n}$$

0,25 pts

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-1/n} \leq u_n \leq 2 \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{-1/(n+2)}$$

0,25 pts

(c) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.**Partie III :**

0,5 pts

(1) (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , il existe un nombre réel strictement positif unique a_n tel que : $f(a_n) = e^{-1/n}$.

0,25 pts

(b) Montrer que la suite numérique $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

0,25 pts

(c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\frac{1}{a_n} + \ln \left(1 + \frac{1}{a_n} \right) = -\frac{1}{n}$$

0,25 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall t \in [0, +\infty[$,

$$1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$$

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$-\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

(3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.

0,5 pts

(a) Vérifier que $a_4 \geq 1$, et en déduire que $a_n \geq 1$. (On admettra que : $e^{3/4} \geq 2$.)

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$$

On pourra utiliser les **questions (1)-(c) et (2)-(b)** de la **Partie III**.

0,5 pts

(c) Montrer que :

$$\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$$

Puis en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

0,5 pts

(d) Déterminer la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{n}}$$