



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2016
- الموضوع -

ذ. سعد شكري

saadchoukri.com

المملكة المغربية

†.XIIΛΞ† | ΗΣΥΟΞΘ



وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

†◻◻⊙† | ⊙×◻≤ ◻◻⊙

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Le calcul des probabilités (3 pts)

EXERCICE 2 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (6,5 pts)

EXERCICE 5 : L'analyse (3,5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (3 pts)

On a deux boîtes U et V . La boîte U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues. La boîte V contient 2 boules rouges et 4 boules bleues.

On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard une boule de la boîte U . Si elle est rouge, on la remet dans la boîte V , puis on tire au hasard une boule de la boîte V . Si elle est bleue, on la pose de côté, puis on tire une boule de la boîte V .

Soient les événements suivants :

- R_U : "La boule tirée de la boîte U est rouge"
- B_U : "La boule tirée de la boîte U est bleue"
- R_V : "La boule tirée de la boîte V est rouge"
- B_V : "La boule tirée de la boîte V est bleue"

0,5 pts

(1) Calculer la probabilité de chacun des deux événements R_U et B_U .

0,5 pts

(2) (a) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement R_U est réalisé.

0,5 pts

(b) Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement B_U est réalisé.

1 pts

(3) Montrer que la probabilité de l'événement B_V est : $\frac{13}{21}$

0,5 pts

(4) En déduire la probabilité de l'événement R_V .

EXERCICE 2 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'unité :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Pour chaque nombre complexe $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$M(z) = \begin{pmatrix} x + 2y & 0 & 5y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x - 2y \end{pmatrix}$$

Et on considère l'ensemble suivant :

$$E = \{M(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$$

1 pts

(1) On munit E de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad M(z) * M(z') = M(z) + M(z') - M(0)$$

Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

(2) On considère l'application :

$$j : \mathbb{C}^* \longrightarrow E$$

qui associe au nombre complexe z de $\mathbb{C}^*$ la matrice $M(z)$ de E .

1 pts

(a) Montrer que j est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(E, \times)$.

0,5 pts

(b) En déduire que $(E \setminus \{M(0)\}, \times)$ est un groupe commutatif.

1 pts

(3) Montrer que $(E, *, \times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 3 : (3,5 pts)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^2 - (1 + \sqrt{3})(1 + i)z + 4i = 0$$

0,5 pts

(1) (a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est :

$$D = ((\sqrt{3} - 1)(1 - i))^2$$

1 pts

(b) Écrire sous forme trigonométrique les deux solutions de (E) .

(2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les deux points A et B d'afixes respectives :

$$a = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{3} + i$$

0,75 pts

(a) Montrer que l'ensemble (D) des points du plan complexe dont l'afixe z vérifie $z = \frac{1}{2}a\bar{z}$ est une droite qui passe par le point B .

0,5 pts

(b) Soient M et M' deux points d'afixes respectives z et z' tels que : $z' = a\bar{z} - b$ et $z \neq b$. Montrer que :

$$\frac{b^2}{(z' - b)(z - b)} = \frac{2}{|z - b|^2}$$

0,75 pts

(c) En déduire que la droite (D) est une bissectrice de l'angle : $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$.

EXERCICE 4 : (6,5 pts)

Soit n est un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln(x) - \frac{n}{x}$$

Et soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,75 pts

(1) (a) Étudier les deux branches infinies de la courbe (C_n) .

- 0,75 pts (b) Étudier les variations de la fonction f_n sur $]0, +\infty[$, puis donner son tableau de variation.
- 0,5 pts (c) Construire la courbe (C_2) .
- 0,5 pts (2) Montrer que la fonction f_n est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- 0,5 pts (3) (a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe un unique nombre réel α_n de l'intervalle $]0, +\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$.
- 0,5 pts (b) Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
- 0,5 pts (c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.
- 0,5 pts (4) (a) Montrer que : $\forall x > 0, \ln(x) < x$.
- 0,5 pts (b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$.
- (5) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \frac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x) dx$$

- 0,5 pts (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ tel que : $I_n = f_n(c_n)$.
- 0,5 pts (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$:
- $$0 \leq I_n \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$
- 0,5 pts (c) Déterminer la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

EXERCICE 5 : (3,5 pts)

Soit n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique g_n à variable réelle x définie sur l'intervalle $[n, +\infty[$ par :

$$g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln t} dt$$

- 0,5 pts (1) (a) Montrer que la fonction g_n est dérivable sur l'intervalle $[n, +\infty[$, puis déterminer sa fonction dérivée première g'_n .
- 0,25 pts (b) Montrer que la fonction g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n, +\infty[$.
- 0,5 pts (2) (a) Montrer que : $\forall x \geq n$,

$$g_n(x) \geq \ln \left(\frac{x-1}{n-1} \right)$$

On pourra utiliser l'inégalité suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad \ln(1+t) \leq t$$

- 0,25 pts (b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$.

0,25 pts

(3) (a) Montrer que g_n est une bijection de l'intervalle $[n, +\infty[$ dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,5 pts

(b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique $u_n \geq n$ tel que :

$$\int_n^{u_n} \frac{1}{\ln t} dt = 1$$

0,5 pts

(4) On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 2}$ définie dans la question 3-b.

(a) Montrer que : $\forall n \geq 2$,

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t} dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t} dt$$

0,5 pts

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.

0,25 pts

(c) Déterminer la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.