



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2016
- الموضوع -

ذ. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 2 : L'arithmétique (3 pts)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (7 pts)

EXERCICE 5 : L'analyse (3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire d'unité I définie par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$$

et soit E l'ensemble suivant :

$$E = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

0,5 pts

(1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$.

0,5 pts

(2) Vérifier que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2$,

$$M(x, y)M(x', y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$$

(3) On pose : $E^* = E \setminus \{M(0, 0)\}$, et on considère l'application suivante :

$$j : \mathbb{C}^* \longrightarrow E^*$$

Qui au nombre complexe $z = x+iy$ associe la matrice $M(x, y)$ de E , avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

0,25 pts

(a) Montrer que j est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$.

0,75 pts

(b) En déduire que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1, 0)$.

0,5 pts

(4) Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

(5) On pose la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0,5 pts

(a) Calculer $A \times M(x, y)$ pour $M(x, y) \in E$.

0,5 pts

(b) En déduire qu'aucun élément de E n'admet de symétrique dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

EXERCICE 2 : (3 pts)**Partie I :**

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$, tel que le nombre premier 173 divise $a^3 + b^3$.

0,25 pts

(1) Montrer que : $a^{171} \equiv -b^{171} [173]$. On remarquera que : $171 = 3 \times 57$.

0,25 pts

(2) Montrer que 173 divise a si et seulement si 173 divise b .

0,25 pts

(3) On suppose que 173 divise a . Montrer que 173 divise $a + b$.(4) On suppose que 173 ne divise pas a .

0,5 pts

(a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $a^{172} \equiv b^{172} [173]$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $a^{171}(a + b) \equiv 0 [173]$.

0,5 pts

(c) En déduire que 173 divise $a + b$.**Partie II :**On considère dans $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ l'équation suivante :

$$(E) : x^3 + y^3 = 173(xy + 1)$$

Soit (x, y) un élément de $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ solution de (E) , on pose :

$$x + y = 173k \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

0,25 pts

(1) Vérifier que : $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$.

0,5 pts

(2) Montrer que $k = 1$, puis résoudre l'équation (E) .**EXERCICE 3 : (3,5 pts)**Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On considère dans le plan complexe deux points M_1 et M_2 tels que les points O , M_1 et M_2 sont distincts deux à deux et non alignés.Soient z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 , et soit M le point dont l'affixe z vérifie la relation :

$$z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que :

$$\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$$

0,5 pts

(b) En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2 .

0,5 pts

(2) Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$, alors M appartient à l'axe des réels.(3) On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et de mesure d'angle α , où $\alpha \in]0, \pi[$.

0,5 pts

(a) Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α .

0,5 pts

(b) Montrer que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$.(4) Soit θ un réel donné de l'intervalle $]0, \pi[$.On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation :

$$6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$$

0,5 pts

(a) Sans calculer z_1 et z_2 , vérifier que :

$$z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$$

0,5 pts

(b) Donner en fonction de θ , la forme trigonométrique du nombre complexe z .**EXERCICE 4 : (7 pts)****Partie I :**

0,5 pts

(1) En appliquant le Théorème des Accroissements Finis à la fonction $t \mapsto e^{-t}$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un réel θ compris entre 0 et x tel que :

$$e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

(2) En déduire que :

0,25 pts

(a) $\forall x > 0, 1 - x < e^{-x}$.

0,25 pts

(b) $\forall x > 0, x + 1 < e^x$.

0,25 pts

(c) $\forall x > 0,$

$$0 < \ln \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} \right) < x$$

Partie II :On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^x}{e^x - 1} & \text{Si } x > 0 \\ 1 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

et soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

(1) (a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$$

Puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall x > 0,$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x}$$

On pourra utiliser le résultat de la question (2)-(a) de la Partie I.

0,5 pts

(b) En déduire que : $\forall x > 0,$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$$

0,5 pts

(3) (a) Vérifier que : $\forall x > 0$,

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} f(x)$$

0,75 pts

(b) En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

Puis interpréter le résultat obtenu.

0,75 pts

(4) (a) Montrer que f est dérivable en tout point de $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0$:

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$$

0,5 pts

(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.On pourra utiliser le résultat de **la question (2)-(b) de la Partie I**.**Partie III :**On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(f(u_n)) \end{cases}$$

0,5 pts

(1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

0,5 pts

(2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.On pourra utiliser le résultat de **la question (2)-(c) de la Partie I**.

0,5 pts

(3) Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation :

$$\ln(f(x)) = x$$

Puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.**EXERCICE 5 : (3 pts)**On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$$

0,5 pts

(1) (a) Étudier le signe de $F(x)$ pour tout x de I .

0,5 pts

(b) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I et calculer $F'(x)$ pour tout x de I .

0,25 pts

(c) Montrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle I .

0,5 pts

(2) (a) En utilisant la technique de changement de variable en posant $u = \sqrt{e^t - 1}$,

montrer que : $\forall x \in I$:

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$

0,5 pts

(b) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

0,25 pts

(3) (a) Montrer que la fonction F est une bijection de l'intervalle I dans un intervalle J que l'on déterminera.

0,5 pts

(b) Déterminer F^{-1} , la bijection réciproque de F .