



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2015
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les nombres complexes (3 pts)

EXERCICE 2 : L'arithmétique (3 pts)

EXERCICE 3 : Les structures algébriques (4 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (6,5 pts)

EXERCICE 5 : L'analyse (3,5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (3 pts)

(1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$$

0,25 pts

(a) Vérifier que $(3 - i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation (E).

0,5 pts

(b) Déterminer a et b , les deux solutions de l'équation (E), sachant que $b \in \mathbb{R}$.

0,25 pts

(c) Vérifier que : $b = (1 - i\sqrt{3})a$.

(2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

Soit A le point d'affixe a et B le point d'affixe b .

0,5 pts

(a) Déterminer b_1 , l'affixe du point B_1 , image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$.

0,5 pts

(b) Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

0,5 pts

(c) Vérifier que :

$$\arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

0,5 pts

(d) Soit C un point d'affixe c , appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de O et de A . Déterminer un argument du nombre complexe $\frac{c}{c-a}$.

EXERCICE 2 : (3 pts)

Soit x un nombre entier relatif tel que :

$$x^{1439} \equiv 1436 [2015]$$

0,25 pts

(1) Sachant que : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$. Montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

0,5 pts

(2) Soit d un diviseur commun de x et de 2015.

0,5 pts

(a) Montrer que d divise 1436.

(b) En déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

0,75 pts

(3) (a) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que :

$$x^{1440} \equiv 1 [5], \quad x^{1440} \equiv 1 [13] \quad \text{et} \quad x^{1440} \equiv 1 [31]$$

On remarquera que : $2015 = 5 \times 13 \times 31$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $x^{1440} \equiv 1 [65]$, et en déduire que : $x^{1440} \equiv 1 [2015]$.

0,5 pts

(4) Montrer que : $x \equiv 1051 [2015]$.

EXERCICE 3 : (4 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont l'unité I est défini par :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

Pour tout nombre réel x , on pose :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ 2x & 1+2x \end{pmatrix}$$

Et on considère l'ensemble suivant : $E = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, que l'on munit de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad M(x)TM(y) = M(x + y + 1)$$

(1) Soit j l'application de $\mathbb{R}$ dans E définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, j(x) = M(x - 1)$.

0,5 pts

(a) Montrer que j est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, T) .

0,5 pts

(b) Montrer que (E, T) est un groupe commutatif.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, M(x)M(y) = M(x + y + xy)$.

0,5 pts

(b) En déduire que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ et que la loi $\times$ est commutative dans E .

0,5 pts

(c) Montrer que la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi T dans E .

0,5 pts

(d) Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E, T) et que I est l'élément neutre dans $(E, \times)$.

0,25 pts

(3) (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$M(x)M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$$

0,75 pts

(b) Montrer que $(E, T, \times)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 4 : (6,5 pts)**Partie I :**

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x(1 + \ln^2 x) & \text{Si } x > 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

(1) Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pts

(2) (a) Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

0,5 pts

(b) Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$$

Puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pts

(c) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, en déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

0,25 pts

(3) (a) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1} .

0,25 pts

(b) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite d'équation : $y = x$.

0,5 pts

(c) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On prendra $e^{-1} = 0,4$.**Partie II :**On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

0,5 pts

(1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-1} \leq u_n < 1$.

0,5 pts

(2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante, et en déduire qu'elle est convergente.(3) On pose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

0,25 pts

(a) Montrer que : $e^{-1} \leq l \leq 1$.

0,5 pts

(b) Déterminer la valeur de l .**Partie III :**Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

0,25 pts

(1) (a) Montrer que la fonction :

$$H : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

est une primitive de la fonction : $h : x \mapsto x \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall x > 0$,

$$\int_1^x t \ln^2(t) dt = \frac{x^2}{2} \ln^2(x) - \int_1^x t \ln(t) dt$$

0,5 pts

(c) En déduire que : $\forall x > 0$,

$$F(x) = -\frac{3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln(x) + \frac{x^2}{2} \ln^2(x)$$

0,25 pts

(2) (a) Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,5 pts

(b) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, et en déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 f(x) dx$$

EXERCICE 5 : (3,5 pts)On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt & \text{Si } x > 0 \\ \ln 2 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que : $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [x, 2x]$,

$$e^{-2x} \leq e^{-t} \leq e^{-x}$$

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall x > 0$,

$$e^{-2x} \ln 2 \leq g(x) \leq e^{-x} \ln 2$$

0,25 pts

(c) En déduire que la fonction g est continue à droite en 0.

0,75 pts

(2) Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x > 0$.

0,5 pts

(3) (a) Montrer que : $\forall t > 0$,

$$-1 \leq \frac{e^{-t} - 1}{t} \leq -e^{-t}$$

On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall x > 0$,

$$-1 \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$$

0,5 pts

(c) En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0.