



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2014
- الموضوع -

ذ. سعد شكري

saadchoukri.com

المملكة المغربية

†.XIIΛΞ† | ΗΣΥΟΞΘ



وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

†◻◻⊙† | ⊙×◻≤ ◻◻⊙

$\Lambda \otimes \Theta \oplus \Gamma \wedge \circ \square \text{Ж} \sqcup \circ \Sigma \wedge + \equiv \equiv +$

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 6 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Le calcul des probabilités (2 pts)

EXERCICE 2 : L'arithmétique (1 pt)

EXERCICE 3 : Les structures algébriques (3,75 pts)

EXERCICE 4 : Les nombres complexes (3,25 pts)

EXERCICE 5 : L'analyse (7,5 pts)

EXERCICE 6 : L'analyse (2,5 pts)

L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (2 pts)

On considère trois boîtes U , V et W .

La boîte W contient une boule noire et deux boules blanches et chacune des boîtes U et V contient deux boules noires et deux boules blanches.

On réalise l'expérience suivante : On tire une boule de la boîte W . Si cette boule est blanche, on la place dans la boîte U , puis on tire deux boules de cette boîte. Si cette boule est noire, on la place dans la boîte V , puis on tire deux boules de cette boîte.

0,25 pts

(1) Quelle est la probabilité d'effectuer le tirage dans la boîte U ?

0,75 pts

(2) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches à la fin de l'expérience ?

1 pts

(3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à la fin de l'expérience. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

EXERCICE 2 : (1 pt)

Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$b_n = 2 \times 10^n + 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2 \times 10^n - 1$$

0,5 pts

(1) Montrer que le plus grand commun diviseur de b_n et c_n divise 2, puis en déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

0,5 pts

(2) Trouver un couple $(x_n, y_n) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant : $b_n x_n + c_n y_n = 1$.

EXERCICE 3 : (3,75 pts)

On pose : $J =] - 1, 1[$.

Partie I :

Pour tous a et b de J , on pose :

$$a * b = \frac{a + b}{1 + ab}$$

0,75 pts

(1) Vérifier que pour tout $(a, b) \in J^2$, $1 + ab > 0$, puis en déduire que $*$ est une loi de composition interne dans J .

0,5 pts

(2) (a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0,25 pts

(b) Montrer que $(J, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0,5 pts

(c) Montrer que $(J, *)$ est un groupe commutatif.

Partie II :

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

0,75 pts

(1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers J .

0,5 pts

(2) Soit g la bijection réciproque de f . (La détermination de g n'est pas demandée).

Pour tous x et y de J , on pose :

$$x \perp y = f(g(x) \times g(y))$$

Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(J^*, \perp)$, où $J^* = J \setminus \{0\}$

0,5 pts

- (3) On rappelle que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif et on admet que la loi $\perp$ est distributive par rapport à la loi $*$ dans J . Montrer que $(J, *, \perp)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 4 : (3,25 pts)

Partie I :

0,5 pts

- (1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + i = 0$$

On note a la solution vérifiant $\operatorname{Re}(a) > 0$.

0,5 pts

- (2) (a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $1 + a$.

0,25 pts

- (b) En déduire que :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

0,5 pts

- (c) Vérifier que :

$$(1 + a)(1 - a) = 1 + i$$

Puis en déduire la forme trigonométrique du nombre complexe $1 - a$.

Partie II :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M et M' d'affixes respectives $a, -a, z$ et z' , et on suppose que :

$$zz' + i = 0$$

0,25 pts

- (1) Soit N le point d'affixe $\bar{z}$. Montrer que les droites (ON) et (OM') sont perpendiculaires.

0,25 pts

- (2) (a) Montrer que :

$$z' - a = i \frac{z - a}{az}$$

0,5 pts

- (b) Montrer que si $z \neq -a$, alors :

$$\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{z - a}{z + a}$$

0,5 pts

- (3) On suppose que les points A, B et M ne sont pas alignés. Montrer que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM .

EXERCICE 5 : (7,5 pts)

Partie I :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$$

Et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Et on prend : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.

1 pts (1) Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Puis donner une interprétation géométrique des deux résultats obtenus.

0,75 pts

(2) Calculer $f'(x)$, puis en déduire les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction g_n définie sur $]0, 1[$ par :

$$g_n(x) = f(x) - x^n$$

0,25 pts

(a) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, 1[$.

0,5 pts

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! \alpha_n \in]0, 1[, f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$$

0,5 pts

(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g_n(\alpha_{n+1}) < 0$.

0,75 pts

(d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

(4) On pose : $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

0,25 pts

(a) Vérifier que : $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$.

0,25 pts

(b) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, h(\alpha_n) = n$, avec :

$$h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$$

0,5 pts

(c) Montrer que : $l = 1$.

0,25 pts

(d) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$.

Partie II :

0,25 pts

(1) (a) Étudier le signe de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_x^1 f(t) dt$$

0,5 pts

(b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_x^1 f(t) dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$$

0,25 pts

(c) En déduire, en cm^2 , l'aire de la partie plane limitée par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x = 1$, $x = e^2$ et $y = 0$.

(2) Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,5 pts

(a) Montrer que pour tous entiers naturels n et k tels que $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

0,5 pts

(c) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

EXERCICE 6 : (2,5 pts)

On considère la fonction numérique g définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt$$

(1) Pour tout $x > 0$, on pose :

$$k(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$$

0,25 pts

(a) Vérifier que : $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$g(x) = -k(\sqrt{x})$$

0,5 pts

(b) Montrer que la fonction g est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$.

0,5 pts

(c) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, puis en déduire que la fonction g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

0,75 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} < -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$$

0,5 pts

(b) En déduire que la fonction g n'est pas dérivable à droite en 0, et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.