



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2014
- الموضوع -

ذ. سعد شكري

saadchoukri.com

المملكة المغربية

†.XIIΛΞ† | ΗΣΥΟΞΘ



وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

+oC.U.O+ | %OXC< o.C%O

Λ ∅ ∅ ∅ ∅ Λ ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ Λ + ∅ ∅ ∅

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : L'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (3 pts)

EXERCICE 2 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (8 pts)

EXERCICE 5 : L'analyse (2 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (3 pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = \underbrace{33 \dots 3}_{n \text{ fois le chiffre } 3} 1$$

0,5 pts

(1) Vérifier que les deux nombres a_1 et a_2 sont premiers.

0,5 pts

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$3a_n + 7 = 10^{n+1}$$

0,75 pts

(3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$10^{30k+2} \equiv 7 [31]$$

0,75 pts

(4) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$3a_{30k+1} \equiv 0 [31]$$

puis en déduire que 31 divise a_{30k+1} .

0,5 pts

(5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n \not\equiv 1 [30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

EXERCICE 2 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro O et d'unité I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$, on pose :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a - b \\ b & a + b \end{pmatrix}$$

Et on considère l'ensemble :

$$E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

0,5 pts

(1) Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

0,75 pts

(2) Calculer $J^2 = J \times J$ sachant que :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis en déduire que E n'est pas stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

(3) On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $*$ par :

$$A * B = A \times N \times B \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui associe à chaque nombre complexe non nul $a + ib$, a et b étant deux nombres réels, la matrice $M(a, b)$.

0,5 pts

(a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), *)$.

0,25 pts

(b) On pose $E^* = E \setminus \{O\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

0,5 pts

(c) Montrer que $(E^*, *)$ est un groupe commutatif.

0,5 pts

(4) Montrer que : $\forall (A, B, C) \in E^3, A * (B + C) = A * B + A * C$.

0,5 pts

(5) En déduire de ce qui précède que $(E, +, *)$ est un corps commutatif.

EXERCICE 3 : (3,5 pts)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit q un nombre réel tel que : $0 < q < \pi/2$.

(1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^2 - \sqrt{2}e^{iq}z + e^{2iq} = 0$$

0,25 pts

(a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $D = (\sqrt{2}ie^{iq})^2$.

0,75 pts

(b) Écrire sous forme trigonométrique les deux racines z_1 et z_2 de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

(2) On considère les points I, J, T_1, T_2 et A d'affixes respectives

$$1, \quad -1, \quad e^{i(q+\pi/4)}, \quad e^{i(q-\pi/4)}, \quad \sqrt{2}e^{iq}$$

0,5 pts

(a) Montrer que les deux droites (OA) et (T_1T_2) sont perpendiculaires.

0,25 pts

(b) Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$. Montrer que les points O, K et A sont alignés.

0,25 pts

(c) En déduire que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$.

(3) Soit r la rotation de centre T_1 et d'angle $\pi/2$.

0,25 pts

(a) Donner l'expression complexe de la rotation r .

0,5 pts

(b) Vérifier que l'affixe du B , image du point I par la rotation r : $b = \sqrt{2}e^{iq} + i$.

0,25 pts

(c) Montrer que les deux droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires.

0,25 pts

(4) Déterminer l'affixe du point C , image du point A par la translation de vecteur $-\vec{v}$.

0,25 pts

(5) Montrer que A est le milieu du segment $[BC]$.

EXERCICE 4 : (8 pts)**Partie I :**

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x \ln x}{1+x^2} & \text{Si } x > 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

0,25 pts

(b) Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$.

0,25 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

0,25 pts

(b) Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

0,5 pts

(c) Montrer que : $\exists \alpha \in]0, 1[, f'(\alpha) = 0$.

0,5 pts

(d) En déduire que : $f'(\alpha^{-1}) = 0$.

Partie II :

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

0,5 pts

(1) (a) Vérifier que : $\forall t \in [1, +\infty[$,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$$

1 pts

(b) Montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[$,

$$F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$$

On remarquera que :

$$F(x) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \frac{\ln t}{t} dt$$

1 pts

(c) Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$$

Puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que F est dérivable sur $[0, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$.

0,25 pts

(b) Étudier les variations de F sur $[0, +\infty[$.

Partie III :

0,5 pts

(1) (a) Montrer que : $\forall t \in]0, +\infty[$,

$$-t \ln t \leq \frac{1}{e}$$

0,25 pts

(b) En déduire que : $\forall t \in [0, +\infty[$,

$$f(t) \leq \frac{1}{e}$$

0,25 pts

(c) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $F(x) < x$.(2) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, 1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = F(u_n) \end{cases}$$

0,5 pts

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.

0,5 pts

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0,5 pts

(c) Déterminer la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ **EXERCICE 5 : (2 pts)**On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{Si } x > 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

0,5 pts

(1) Montrer que g est continue sur $[0, +\infty[$.(2) Pour tout réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$, on pose :

$$L(x) = \int_x^1 g(t) dt$$

0,25 pts

(a) Montrer que : L est continue sur $[0, +\infty[$.

0,25 pts

(b) Calculer $L(x)$ pour $x > 0$.

0,5 pts

(c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$, et en déduire la valeur de $L(0)$.

0,5 pts

(3) Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.