



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2013
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 2 : Le calcul des probabilités (3 pts)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (8,25 pts)

EXERCICE 5 : L'analyse (1,75 pts)

L'usage des calculatrices non programmables est autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis.

EXERCICE 1 : (3,5 pts)**Les deux parties sont indépendantes****Partie I :**

Pour tout x et y de l'intervalle $G =]1, 2[$ on pose :

$$x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

0,5 pts

(1) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G .

(2) On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif. On considère l'application f de $\mathbb{R}_+^*$ vers G définie par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

0,75 pts

(a) Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(G, *)$.

0,5 pts

(b) En déduire que $(G, *)$ est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre.

Partie II :

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire. On définit la matrice zéro O et l'unité I par :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0,5 pts

(1) (a) Vérifier que : $A^3 = O$ et en déduire que A est un diviseur de zéro dans l'anneau $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$.

0,5 pts

(b) Vérifier que :

$$(A^2 - A + I)(A + I) = I$$

En déduire que la matrice $A + I$ admet un inverse dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ que l'on déterminera.

0,75 pts

(2) Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a, b) = aI + bA$ et l'on considère l'ensemble

$$E = \{M(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel dont on déterminera une base.

EXERCICE 2 : (3 pts)

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

- (1) On tire au hasard successivement et avec remise quatre boules de l'urne et on considère la variable aléatoire X égale au nombre de boules noires tirées.

1 pts

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

0,5 pts

(b) Calculer $E(X)$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

- (2) On réalise l'expérience aléatoire suivante en trois étapes :

1 : On tire une boule de l'urne, on marque sa couleur et on la remet dans l'urne.

2 : On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à l'étape 1.

3 : On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne qui contient alors 12 boules après l'étape 2.

On considère les événements suivants :

- N : "La boule tirée à l'étape 1 est noire"

- R : "La boule tirée à l'étape 1 est rouge"

- E : "Toutes les boules tirées à l'étape 3 sont noires"

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$P(E \cap N) = \frac{12}{55}$$

0,5 pts

(b) Calculer $P(E)$.

0,5 pts

(c) Calculer la probabilité de l'événement R sachant que E est réalisé.

EXERCICE 3 : (3,5 pts)

Partie I :

Soit a un nombre complexe différent de 1. Et on considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

0,5 pts

- (1) Montrer que :

$$z_1 = \frac{a-1}{2}(1+i) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{a-1}{2}(1-i)$$

Sont les deux solutions de l'équation (E) .

- (2) On prend $a = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$a - 1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$$

1 pts

(b) En déduire la forme trigonométrique de z_1 et z_2 .

Partie II :

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On admet que $\operatorname{Re}(a) < 0$ et on considère les points $A(a)$, $B(-i)$, $C(i)$ et $B'(1)$.

0,5 pts

(1) Déterminer en fonction de a , les affixes des points J et K milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$.

0,5 pts

(2) Soit r_1 la rotation de centre J et d'angle $\pi/2$ et r_2 la rotation de centre K et d'angle $\pi/2$. On pose $C' = r_1(C)$ et $A' = r_2(A)$ et soient c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A' .

0,5 pts

(a) Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$.

(3) Calculer $\frac{a' - c'}{a - 1}$, et en déduire que la droite (AB') est une hauteur du triangle $A'B'C'$.

EXERCICE 4 : (8,25 pts)

(1) Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}} & \text{Si } x > 0 \\ 1 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

0,5 pts

(a) Montrer que f est continue à droite au point 0, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

0,5 pts

(b) Étudier la dérivabilité de f à droite au point 0. On pourra utiliser le résultat $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0$.

0,5 pts

(c) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall x > 0$,

$$f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + x^2 \ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

0,5 pts

(d) Donner le tableau de variation de la fonction f .

(2) Soit F la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Et soit $(\mathcal{C}_F)$ la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 pts

(a) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ sur l'intervalle $[e, +\infty[$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall t \geq e$,

$$t \ln t \leq \sqrt{1 + t^2 \ln^2 t} \leq \sqrt{2} t \ln t$$

0,75 pts

(c) Montrer que : $\forall x \geq e$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq \ln(\ln x)$$

0,5 pts

(d) En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

0,5 pts

(e) Montrer que (C_F) admet deux points d'inflexions dont on déterminera les abscisses.

1 pts

(f) Construire (C_F) . On prend $F(1) \simeq 0,5$ et $F(e^{-1}) \simeq 0,4$.(3) Pour tout x de $[0, +\infty[$ on pose :

$$\varphi(x) = x - F(x)$$

0,75 pts

(a) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

Et étudier les variations de φ .

0,5 pts

(b) Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation $\varphi(x) = n$ admet une seule solution α_n dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

0,5 pts

(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \geq n$, puis calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

0,5 pts

(4) (a) Montrer que : $\forall n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$$

On pourra utiliser le théorème des Accroissements Finis.

0,5 pts

(b) Calculer la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$$

EXERCICE 5 : (1,75 pts)Pour tout entier naturel non nul n on pose :

$$u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n)$$

0,25 pts

(1) Vérifier que : $\forall n \geq 1$,

$$v_n = n^2 (\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)))$$

0,5 pts

(2) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que : $\forall n \geq 1$,

$$\exists c \in]n, n+1[, \quad v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2) \arctan(c)}$$

0,5 pts

(3) Montrer que : $\forall n \geq 1$,

$$\frac{-n^2}{(1+n^2) \arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(n+1)^2) \arctan(n+1)}$$

0,5 pts

(4) Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.