



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2013
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 2 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 3 : L'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (3 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (10 pts)

L'usage des calculatrices non programmables est autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis.

EXERCICE 1 : (3,5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif, unitaire et intègre.

(1) On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad x * y = x + y - 2$$

0,5 pts

(a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0,25 pts

(b) Montrer que $(\mathbb{Z}, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0,5 pts

(c) En déduire que $(\mathbb{Z}, *)$ est un groupe commutatif.

(2) On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad xTy = xy - 2x - 2y + 6$$

Et on considère l'application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad f(x) = x + 2$$

0,5 pts

(a) Montrer que l'application f est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, \times)$ dans $(\mathbb{Z}, T)$.

0,25 pts

(b) Montrer que :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, \quad (x * y)Tz = (xTz) * (yTz)$$

0,75 pts

(3) En déduire de tout ce qui précède que $(\mathbb{Z}, *, T)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0,25 pts

(4) (a) Montrer que : $xTy = 2$ si et seulement si $x = 2$ ou $y = 2$.

0,25 pts

(b) En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z}, *, T)$ est intègre.

0,25 pts

(c) $(\mathbb{Z}, *, T)$ est-il un corps ? (justifier votre réponse)

EXERCICE 2 : (3,5 points)**Partie I :**

Soit a un nombre complexe non nul.

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$$

0,25 pts

(1) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = (-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$.

0,5 pts

(2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

Partie II :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Et on considère les points A, B et M d'affixes respectifs $a, b = ae^{i\pi/3}$ et z . Soit r la rotation de centre M et d'angle $\pi/3$. Et on pose $A_1 = r^{-1}(A)$ et $B_1 = r(B)$, avec r^{-1} désigne la rotation réciproque de r . Et soient a_1 et b_1 les affixes respectifs de A_1 et B_1 .

0,5 pts

(1) Vérifier que le triangle OAB est équilatéral.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que :

$$a_1 = \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \quad \text{et} \quad b_1 = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

0,5 pts

(b) Montrer que le quadrilatère OA_1MB_1 est un parallélogramme.(3) On suppose que : $M \neq A$ et $M \neq B$.

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$\frac{z - b_1}{z - a_1} = -\frac{z - b}{z - a} \times \frac{a}{b}$$

0,75 pts

(b) Montrer que M, A_1 et B_1 sont alignés si et seulement si M, O, A et B sont cocycliques.**EXERCICE 3 : (3 pts)**

L'objectif de l'exercice est de chercher les entiers naturels n strictement supérieurs à 1 et qui vérifient la propriété suivante :

$$(R) : \quad 3^n - 2^n \equiv 0 [n]$$

(1) On suppose que n vérifie la propriété (R) et soit p le plus petit diviseur premier positif de n .

0,75 pts

(a) Montrer que :

$$3^n - 2^n \equiv 0 [p]$$

Et en déduire que $p \geq 5$.

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$2^{p-1} \equiv 1 [p] \quad \text{et} \quad 3^{p-1} \equiv 1 [p]$$

0,5 pts

(c) Montrer qu'il existe un couple (a, b) de $\mathbb{Z}^2$ tel que :

$$an - b(p-1) = 1$$

0,5 pts

(d) Soient r et q le reste et le quotient de la division euclidienne de a par $p-1$

$$a = q(p-1) + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < p-1 \quad \text{et} \quad q \in \mathbb{Z}$$

Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que :

$$rn = 1 + k(p-1)$$

0,75 pts

(2) En déduire de tout ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1 vérifiant (R) .

EXERCICE 4 : (10 points)

On considère la fonction numérique h définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x \ln x} & \forall x > 1 \\ 1 & \text{Si } x = 1 \end{cases}$$

Partie I :

0,25 pts

(1) (a) Montrer que la fonction h est continue à droite en 1.

0,75 pts

(b) Montrer que : $\forall x > 1, \ln x < x - 1$. Et en déduire que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

0,5 pts

(2) (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ puis donner le tableau de variations de h .

0,25 pts

(b) En déduire que : $\forall x \geq 1, 0 < h(x) \leq 1$.

Partie II :

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t} \ln t} & \forall x > 1 \\ \ln 2 & \text{Si } x = 1 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que : $\forall x > 1,$

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} = \ln 2$$

0,25 pts

(b) Vérifier que : $\forall x > 1,$

$$g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt$$

0,5 pts

(c) Montrer que : $\forall x > 1,$

$$g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{t-1}{t \ln t} dt$$

0,5 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall x > 1,$

$$(x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$$

0,5 pts

(b) En déduire que la fonction g est dérivable à droite au point 1.

0,75 pts

(c) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

0,75 pts

(3) (a) Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et que $\forall x > 1$,

$$g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$$

0,5 pts

(b) En déduire que : $\forall x \geq 1$,

$$0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$$

Puis donner le tableau de variations de g .

0,5 pts

(c) Construire la courbe $(\mathcal{C})$.**Partie III :**

I - On considère la fonction suivante :

$$k : x \mapsto g(x) - x + 1$$

0,5 pts

(1) Montrer que la fonction k est une bijection de l'intervalle $[1, +\infty[$ dans l'intervalle $] - \infty, \ln 2]$.

0,25 pts

(2) En déduire qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1, +\infty[$ qui vérifie :

$$1 + g(\alpha) = \alpha$$

II - On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} 1 \leq u_0 < \alpha \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} = 1 + g(u_n) \end{cases}$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que : $\forall n \geq 0, 1 \leq u_n < \alpha$.

0,5 pts

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

0,75 pts

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall n \geq 0$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

0,25 pts

(c) En déduire une deuxième fois, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$