



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2012
- الموضوع -

ذ. سعد شكري

saadchoukri.com

المملكة المغربية

†.XΛΞ† | ΗΥΟΞΘ



وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

+oC.U.O+ | %OXC< o.C%O

Λ ∅ ∅ ∅ ∅ Λ ∅ ∅ ∅ ∅ ∅ Λ + ∅ ∅ ∅ +

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 2 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 3 : L'arithmétique (3 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse..... (7,5 pts)

EXERCICE 5 : L'analyse..... (2,5 pts)

L'usage des calculatrices non programmables est autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis.

EXERCICE 1 : (3,5 pts)**Les deux parties sont indépendantes****Partie I :**

Pour tout a et b de l'intervalle $I = [1, +\infty[$ on pose :

$$a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$$

0,5 pts (1) Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne dans I .

0,5 pts (2) Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative.

0,25 pts (3) Montrer que $(I, \perp)$ admet un élément neutre.

Partie II :

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire. Et on considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

0,5 pts (1) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

(2) On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto M(x) \end{aligned}$$

0,5 pts (a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(E, \times)$.

0,5 pts (b) En déduire la structure de $(E, \times)$.

0,75 pts (c) Montrer que l'ensemble :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

est un sous-groupe de $(E, \times)$.

EXERCICE 2 : (3,5 pts)**Les deux parties sont indépendantes**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie I :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : z^2 - 4 \left(1 + \frac{2}{3}i \right) z + \frac{5}{3} + 4i = 0$$

0,5 pts (1) (a) Vérifier que $z_1 = 1 + 2i/3$ est une solution de l'équation (E) .

0,25 pts (b) Montrer que la deuxième solution de l'équation (E) est $z_2 = 3z_1$.

0,5 pts

- (2) Soit θ un argument du nombre complexe z_1 . Écrire en fonction de θ la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{5}{3} + 4i$.

Partie II :

On considère trois points distincts deux à deux A , B et Ω , d'affixes respectifs les nombres complexes a , b et ω .

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\pi/3$. On pose $P = r(A)$ et $B = r(Q)$ et soient p et q les affixes respectifs des points P et Q .

0,5 pts

- (1) (a) Montrer que :

$$p = \omega + e^{i\pi/3}(a - \omega) \quad \text{et} \quad q = \omega + e^{-i\pi/3}(b - \omega)$$

0,25 pts

- (b) Montrer que :

$$\frac{1 - e^{i\pi/3}}{1 - e^{-i\pi/3}} = e^{4i\pi/3}$$

0,5 pts

- (c) Montrer que :

$$\frac{p - a}{q - b} = \frac{\omega - a}{\omega - b} e^{4i\pi/3}$$

- (2) On suppose que :

$$\frac{\omega - a}{\omega - b} = e^{2i\pi/3}$$

0,25 pts

- (a) Montrer que $APQB$ est un parallélogramme.

0,75 pts

- (b) Montrer que :

$$\arg\left(\frac{b - a}{p - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

en déduire que $APQB$ est un rectangle.

EXERCICE 3 : (3 pts)

0,25 pts

- (1) (a) Vérifier que le nombre 503 est premier.

0,75 pts

- (b) Montrer que :

$$7^{502} \equiv 1 [503]$$

Et en déduire que :

$$7^{2008} \equiv 1 [503]$$

0,5 pts

- (2) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$$(E) : 49x - 6y = 1$$

Sachant que $(1, 8)$ est une solution particulière de l'équation (E) ; résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

- (3) On pose :

$$N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$$

0,25 pts

- (a) Montrer que le couple $(7^{2006}, N)$ est solution de l'équation (E) .

1 pts

(b) Montrer que $N \equiv 0 [4]$ et $N \equiv 0 [503]$.

0,25 pts

(c) En déduire que le nombre N est divisible par 2012.**EXERCICE 4 : (7,5 pts)****Partie I :**Soit g la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

0,5 pts

(1) Étudier les variations de g sur $[0, +\infty[$.

0,5 pts

(2) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.**Partie II :**Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$$

1 pts

(1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

0,5 pts

(2) Montrer que pour tout réel x on a :

$$f'(x) = e^x g(e^{-x})$$

0,5 pts

(3) Dresser le tableau de variations de f .

1 pts

(4) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f et la courbe $(\mathcal{C}')$ représentative de la fonction $(-f)$ dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.On admet que $-0,7$ est une valeur approchée de l'abscisse du seul point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,75 pts

(5) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[-1, 0]$ on a :

$$0 < f'(x) \leq g(e)$$

0,75 pts

(6) Montrer que l'équation $f(x) + x = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $-1 < \alpha < 0$.(7) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -f(u_n) \end{cases}$$

0,5 pts

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 0$.

0,75 pts

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$$

0,5 pts

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$$

0,25 pts

(d) Sachant que $g(e) < 0,6$. Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE 5 : (2,5 pts)

On considère la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

0,25 pts

(1) Calculer $F(1)$.

0,75 pts

(2) (a) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

0,5 pts

(b) En déduire que pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ on a : $F'(x) = 0$.

0,5 pts

(3) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\forall x > 0$,

$$F(x) = \left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x} \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\arctan t}{t} dt$$

0,25 pts

(4) Montrer que : $\forall x > 0$,

$$\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

0,25 pts

(5) Déduire que : $\forall x > 0$,

$$\ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\arctan t}{t} dt$$