



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2012
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 2 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 3 : L'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (3 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (5,5 pts)

EXERCICE 5 : L'analyse (4,5 pts)

L'usage des calculatrices non programmables est autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis.

EXERCICE 1 : (3,5 pts)**Les deux parties sont indépendantes****Partie I :**Dans l'anneau unitaire $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$, on considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,75 pts

(1) Calculer $I - A$ et A^2 .

0,5 pts

(2) En déduire que A admet une matrice inverse que l'on déterminera.**Partie II :**Pour tout a et b de l'intervalle $I =]1, +\infty[$, on pose :

$$a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$$

0,25 pts

(1) Vérifier que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$$

0,5 pts

(2) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .(3) On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe commutatif. Et on considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow I \\ x &\longmapsto \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

0,5 pts

(a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(I, *)$.

0,25 pts

(b) En déduire la structure de $(I, *)$.

0,75 pts

(c) Montrer que l'ensemble :

$$\Gamma = \left\{ \sqrt{1+2^m} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$$

est un sous-groupe de $(I, *)$.**EXERCICE 2 : (3,5 pts)****Les deux parties sont indépendantes**Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : iz^2 + (2 - i)az - (1 + i)a^2 = 0$$

où a est un nombre complexe non nul.

0,75 pts

(1) Déterminer z_1 et z_2 , les deux racines de l'équation (E) .

0,25 pts

(2) (a) Vérifier que : $z_1 z_2 = a^2(i - 1)$.

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$z_1 z_2 \text{ est un nombre réel} \iff \arg a \equiv -\frac{3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

Partie II :

Soient c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul.

On considère les points A, B, C, D et M d'abscisses respectifs $1, 1 + i, c, ic$ et z .

0,5 pts

(1) (a) Montrer que :

$$A, D \text{ et } M \text{ sont alignés} \iff (ic + 1)z + (ic - 1)\bar{z} = 2ic$$

Remarquer que $c = \bar{c}$.

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$(AD) \perp (OM) \iff (ic + 1)z - (ic - 1)\bar{z} = 0$$

(2) Soit h l'abscisse du point H , la projection orthogonale du point O sur (AD) .

0,75 pts

(a) Montrer que :

$$h - (1 + i) = \frac{i}{c}(h - c)$$

0,25 pts

(b) En déduire que $(CH) \perp (BH)$.

EXERCICE 3 : (3 pts)

(1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$(E) : 143x - 195y = 52$$

0,5 pts

(a) Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

0,75 pts

(b) Sachant que $(-1, -1)$ est une solution particulière de l'équation (E) , résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

0,5 pts

(2) Soit n un entier naturel non nul premier avec 5. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$ on a :

$$n^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$$

(3) Soient x et y deux entiers naturels non nuls tels que :

$$x \equiv y \pmod{4}$$

0,5 pts

(a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$n^x \equiv n^y \pmod{5}$$

0,5 pts

(b) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$n^x \equiv n^y \pmod{10}$$

0,25 pts

(4) Soient x et y deux entiers naturels tels que (x, y) est solution de l'équation (E) .
Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

EXERCICE 4 : (5,5 pts)

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

(1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

0,5 pts

(2) (a) Étudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $-\infty$.

0,5 pts

(b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la position relative de (C_n) et (D) .

0,75 pts

(3) Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

0,75 pts

(4) Construire la courbe (C_3) . On prend $f_3(-0,6) \simeq 0$, $f_3(-1,5) \simeq 0$ et $\ln 3 \simeq 1,1$.

0,25 pts

(5) (a) Montrer que pour $n \geq 3$ on a : $\frac{e}{n} < \ln n$

1 pts

(b) Montrer que pour $n \geq 3$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que :

$$x_n \leq -\ln n \quad \text{et} \quad -\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0$$

0,5 pts

(c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

(6) On considère la fonction numérique g définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \begin{cases} -1 - x \ln x & \text{Si } x > 0 \\ -1 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

0,25 pts

(a) Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0.

0,25 pts

(b) Vérifier que pour $n \geq 3$ on a :

$$g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$$

0,25 pts

(c) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$$

EXERCICE 5 : (4,5 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur $[0, 1]$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

0,25 pts

(1) Soit x un élément de $[0, 1]$. Montrer que pour tout t de $[0, x]$ on a :

$$\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$$

(2) Soit x un élément de $]0, 1]$.

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$$

0,75 pts

(b) Montrer que :

$$\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$$

En déduire que la fonction F est continue à droite au point 0.

0,75 pts

(3) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout x de $[0, 1]$ on a :

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

(4) Soit x un élément de $]0, 1]$.

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt$$

0,75 pts

(b) Montrer que :

$$-\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$$

On pourra utiliser le résultat de **La question 1**.

0,75 pts

- (c) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0, x]$, montrer que :

$$-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{4}{3(1+2x)^2}$$

0,25 pts

- (d) Dédurre que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant son nombre dérivé à droite au point 0.