



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2011
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices tous indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 2 : L'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (2,5 pts)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (4 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (6 pts)

EXERCICE 5 : L'analyse (4 pts)

Les calculatrices non programmables sont autorisées.

EXERCICE 1 : (3,5 pts)

Pour tout x et y de l'intervalle $I =]0, 1[$ on pose :

$$x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .

0,5 pts

(b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0,5 pts

(c) Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0,5 pts

(2) Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

(3) On considère les deux ensembles

$$H = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{et} \quad K = \left\{ \frac{1}{1+2^n} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

0,5 pts

(a) Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

0,5 pts

(b) On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : H &\longrightarrow I \\ x &\longmapsto \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Montrer que φ est un homomorphisme de $(H, \times)$ vers $(I, *)$.

0,5 pts

(c) En déduire que K est un sous-groupe de $(I, *)$.

EXERCICE 2 : (2,5 pts)

Soit x un nombre entier naturel tel que :

$$10^x \equiv 2 \pmod{19}$$

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que :

$$10^{x+1} \equiv 1 \pmod{19}$$

0,5 pts

(b) Montrer que :

$$10^{18} \equiv 1 \pmod{19}$$

(2) Soit d le plus grand diviseur commun des deux nombres 18 et $x+1$.

0,75 pts

(a) Montrer que :

$$10^d \equiv 1 \pmod{19}$$

0,5 pts

(b) Montrer que : $d = 18$.

0,5 pts

(c) En déduire que :

$$x \equiv 17 \pmod{18}$$

EXERCICE 3 : (4 pts)

Partie I :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$$

0,5 pts

(1) Vérifier que $-2i$ est une solution de l'équation (E) .

0,5 pts

(2) Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

0,5 pts

(3) (a) Déterminer les deux racines carrées du nombre $5 - 12i$.

0,5 pts

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

Partie II :

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = -1 + 3i$, $b = -2i$ et $c = 2 + i$.

0,5 pts

(1) Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C .

(2) On considère la rotation R_1 de centre B et dont une mesure de l'angle est $\pi/3$ et la rotation R_2 de centre A et dont une mesure de l'angle est $-2\pi/3$. Soit M un point du plan complexe d'affixe z , M_1 son image par la rotation R_1 et M_2 son image par la rotation R_2 .

0,5 pts

(a) Vérifier que l'expression complexe de la rotation R_1 est :

$$z_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z - \sqrt{3} - i$$

0,5 pts

(b) Déterminer z_2 , l'affixe de M_2 en fonction de z .

0,5 pts

(c) En déduire que I , le milieu du segment $[M_1M_2]$, est un point fixe.

EXERCICE 4 : (6 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.

1 pts

(1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$$

0,25 pts

(2) (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

0,75 pts

(b) Montrer que f est une bijection de l'intervalle $]0, +\infty[$ vers un intervalle J que

l'on déterminera puis dresser le tableau de variation de la bijection réciproque f^{-1} .

0,75 pts

- (3) Calculer $f(1)$ et $f(e)$ puis construire $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

- (4) (a) Calculer l'intégrale

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$$

On posera : $t = f^{-1}(x)$.

0,5 pts

- (b) En déduire l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ et les droites d'équations : $x = 1$, $x = e + 1$ et $y = x$.

- (5) Pour tout entier naturel non nul n , on considère l'équation :

$$(E_n) : x + \ln x = n$$

0,25 pts

- (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique x_n .

0,5 pts

- (b) Déterminer la valeur de x_1 puis montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

0,5 pts

- (6) (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(x_n) \leq f(n)$, en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \leq n$.

0,5 pts

- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$n - \ln(n) \leq x_n$$

0,5 pts

- (c) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - n}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)}$$

EXERCICE 5 : (4 pts)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,5 pts

- (1) Montrer que pour $n \geq 2$ il existe un réel unique α_n de l'intervalle $]0, 1[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$.

0,75 pts

- (2) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante, en déduire qu'elle est convergente. On pose :

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$$

0,5 pts

- (3) (a) Vérifier que pour $t \neq 1$ on a :

$$1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

0,5 pts

(b) En déduire que :

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$$

0,5 pts

(4) (a) Montrer que : $\forall n \geq 2$:

$$1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$$

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall n \geq 2$,

$$0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$$

0,75 pts

(c) En déduire que :

$$l = 1 - e^{-1}$$