



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2011
- الموضوع -

ذ. سعد شكري

saadchoukri.com

المملكة المغربية

†.XIIΛΞ† | ΗΣΥΟΞΘ



وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

†.□.□.⊙† | %⊙×□≤ .□.:%

[illegible]

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (4 pts)

EXERCICE 2 : L'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (2,5 pts)

EXERCICE 3 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (6,5 pts)

EXERCICE 5 : L'analyse (3,5 pts)

Les calculatrices non programmables sont autorisées.

EXERCICE 1 : (4 pts)**Les deux parties sont indépendantes****Partie I :**

Dans l'anneau $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ on considère les deux matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose : $A^0 = I$, $A^1 = A$, $A^2 = A \times A$ et $A^{n+1} = A^n \times A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{2k} = I$.

(2) Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} que l'on déterminera.

Partie II :

Soit a un nombre réel.

Pour tout x et y de l'intervalle $I =]a, +\infty[$ on pose :

$$x * y = (x - a)(y - a) + a$$

(1) (a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .

(b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

(c) Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

(2) Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

(3) On considère l'application :

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \frac{1}{x - a}$$

(a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(I, *)$ vers $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

(b) Résoudre dans l'ensemble I l'équation : $x^{(3)} = a^3 + a$ où $x^{(3)} = x * x * x$.

EXERCICE 2 : (2,5 pts)

Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est :

$$N = \underbrace{11 \dots 1}_{2010 \text{ fois } 1}$$

(1) Montrer que le nombre N est divisible par 11.

(2) (a) Vérifier que le nombre 2011 est premier et que $10^{2010} - 1 = 9N$.

(b) Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$.

0,5 pts

(c) En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N .

0,5 pts

(3) Montrer que le nombre N est divisible par 22121.**EXERCICE 3 : (3,5 pts)****Partie I :**Soit m un nombre complexe non nul.On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E_m) : z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$$

0,5 pts

(1) Vérifier que le nombre $z_1 = -m + 2$ est solution de l'équation (E_m) .(2) Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m) .

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$z_1 z_2 = 1 \iff im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$$

1 pts

(b) Déterminer les deux valeurs de m pour lesquelles on a : $z_1 z_2 = 1$.**Partie II :**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère l'application S qui au point M , d'affixe z , fait correspondre le point M' , d'affixe z' , tel que : $z' - 1 = -(z - 1)$, et la rotation R de centre le point Ω d'affixe $(1 + i)$ et d'angle $\pi/2$, et soit z'' l'affixe du point $M'' = R(M)$.

0,25 pts

(1) (a) Montrer que S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1.

0,25 pts

(b) Montrer que : $z'' = iz + 2$.(2) Soit A le point d'affixe 2. On suppose que le point M est distinct du point O origine du repère.

0,5 pts

(a) Calculer $\frac{z'' - 2}{z' - 2}$, et en déduire la nature du triangle $AM'M''$.

0,5 pts

(b) Déterminer l'ensemble des pts M pour lesquels les pts A , Ω , M' et M'' sont cocycliques.**EXERCICE 4 : (6,5 pts)****Partie I :**On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln x} & \text{Si } x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 pts

(1) Vérifier que pour tout x de l'ensemble $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ on a :

$$e^x = x^n \iff n = f(x)$$

0,5 pts

(2) Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

1,5 pts

(3) Calculer les limites :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0,75 pts

(4) Étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,5 pts

(5) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

0,5 pts

(6) Représenter graphiquement (C_f) .

0,5 pts

(7) Montrer que pour $n \geq 3$, l'équation (E) admet exactement deux solutions a_n et b_n telles que : $1 < a_n < e < b_n$.**Partie II :**

0,5 pts

(1) Montrer que : $\forall n \geq 3, b_n \geq n$, en déduire la limite de la suite $(b_n)_{n \geq 3}$.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall n \geq 3,$

$$\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$$

en déduire la limite de la suite $(a_n)_{n \geq 3}$.

0,5 pts

(c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = e$.**EXERCICE 5 : (3,5 pts)**On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que : $\forall x \geq 0,$

$$0 \leq F(x) \leq x e^{-x^2}$$

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall x \geq 1, e^{-x^2} \leq e^{-x}$, et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

0,5 pts

(2) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et que : $\forall x \geq 0,$

$$F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$$

(3) On considère la fonction numérique G définie sur l'intervalle $[0, \pi/2]$ par :

$$G(x) = \begin{cases} F(\tan x) & \text{Si } 0 \leq x < \pi/2 \\ 0 & \text{Si } x = \pi/2 \end{cases}$$

0,25 pts

(a) Montrer que la fonction G est continue à gauche en $\pi/2$.

0,75 pts

(b) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0, +\infty[$ tel que : $F'(c) = 0$ et que :

$$F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$$

On pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction G sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

(4) On considère la fonction numérique H définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$H(x) = F'(x) \frac{e^{x^2}}{2x}$$

0,5 pts

(a) Montrer que la fonction H est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

0,5 pts

(b) En déduire que c est unique, puis donner le tableau de variation de F .