



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2010
- الموضوع -

ذ. سعد شكري

saadchoukri.com

المملكة المغربية

†.XIIΛΞ† | ΗΣΥΟΞΘ



وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

+oC。U。O+ | %Ox C≤ o。C%O

$\Lambda \otimes \Theta \oplus \Gamma \wedge \circ \square \Psi \sqcup \circ O \otimes \Lambda + \% || \% +$

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3 pts)

EXERCICE 2 : Les nombres complexes (4 pts)

EXERCICE 3 : Les probabilités (3 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (10 pts)

Les calculatrices non programmables sont autorisées.

EXERCICE 1 : (3 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère les deux ensembles suivants :

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad F = \{ M(\ln(x)) \mid x \in \mathbb{R}_+^* \}$$

- 0,5 pts (1) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.
- 0,5 pts (2) (a) Montrer que l'application φ qui à tout nombre réel x associe la matrice $M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$.
- 0,5 pts (b) En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.
- 0,5 pts (c) Pour tout réel x , déterminer $M^{-1}(x)$, l'inverse de la matrice $M(x)$.
- 0,5 pts (d) Résoudre dans l'ensemble E l'équation $A^5 X = B$ où $A = M(2)$ et $B = M(12)$, avec : $A^5 = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{5 \text{ fois}}$.
- 0,5 pts (3) Montrer que l'ensemble F est un sous-groupe de $(E, \times)$.

EXERCICE 2 : (4 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

(1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$$

- 0,5 pts (a) Vérifier que le nombre $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E) .
- 0,5 pts (b) En déduire b , la deuxième solution de l'équation (E) .
- 0,5 pts (2) (a) Montrer que
- $$a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\pi/6}$$
- 0,75 pts (b) Écrire a sous forme trigonométrique.
- (3) On considère les points A , B et C dont les affixes sont respectivement a , b et $c = 2i + 2e^{i\pi/7}$.
Soit (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$.
- 0,5 pts (a) Déterminer ω , l'affixe du point Ω centre du cercle (Γ) .
- 0,5 pts (b) Montrer que les points O et C appartiennent au cercle (Γ) .
- 0,75 pts (c) Montrer que le nombre complexe $\frac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

EXERCICE 3 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges. On extrait les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête l'expérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées.

0,25 pts

(1) (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .

0,5 pts

(b) Calculer la probabilité de l'événement $[X = 1]$.

0,5 pts

(c) Montrer que :

$$P[X = 2] = \frac{5}{33}$$

0,5 pts

(d) Calculer la probabilité de l'événement $[X = 3]$.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est :

$$E(X) = \frac{13}{11}$$

0,75 pts

(b) Calculer $E(X^2)$ et en déduire la valeur de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X .

EXERCICE 4 : (10 pts)**Partie I :**

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I = [0, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - \ln(1 - x)} & \text{Si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{Si } x = 1 \end{cases}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

(1) Montrer que f est continue à gauche au point 1.

0,5 pts

(2) Étudier la dérivabilité de f à gauche au point 1.

0,75 pts

(3) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I puis donner son tableau de variations.

0,5 pts

(4) (a) Montrer que la courbe (C_f) admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\frac{e-1}{e}$.

0,75 pts

(b) Construire la courbe (C_f) en précisant sa demi-tangente au point d'abscisse 0. On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$

0,5 pts

(5) Montrer qu'il existe un nombre réel unique α de l'intervalle I vérifiant : $f(\alpha) = \alpha$.

0,25 pts

(6) (a) Montrer que f est une bijection de l'intervalle I vers I .

0,5 pts

(b) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle I .

Partie II :

On pose :

$$I_0 = \int_0^1 f(t) dt \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$$

Pour tout entier naturel n non nul.

0,75 pts

(1) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0,75 pts

(2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

puis déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$.

Partie III :

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $J = [0, 1[$. Et pour tout entier naturel n non nul on pose :

$$F_0(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{et} \quad F_n(x) = \int_0^x t^n f(t) dt$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n F_k(x)$$

1 pts

(1) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout x de J , on a

$$F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt$$

0,5 pts

(2) (a) Montrer que la fonction : $x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ est strictement décroissante sur J .

0,5 pts

(b) Montrer que la fonction :

$$t \mapsto \frac{f(t)}{1-t}$$

est strictement croissante sur $[0, x]$ pour tout x élément de J .

1 pts

(3) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout x de J , on a :

$$0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

0,5 pts

(b) En déduire que pour tout x de l'intervalle J on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$$

0,5 pts

(4) (a) Déterminer $F(x)$ pour $x \in J$.

0,25 pts

(b) Déterminer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$$