



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2010
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3,5 pts)

EXERCICE 2 : Les nombres complexes (3,5 pts)

EXERCICE 3 : L'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (3 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (6,25 pts)

EXERCICE 5 : L'analyse (3,75 pts)

Les calculatrices programmables sont strictement interdites.

EXERCICE 1 : (3,5 pts)**Les deux parties sont indépendantes****Partie I :**

On munit l'ensemble $I =]0, +\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\forall (a, b) \in I \times I, \quad a * b = e^{\ln(a) \ln(b)}$$

- 0,5 pts (1) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans I .
- 0,25 pts (2) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε que l'on déterminera.
- 0,75 pts (3) (a) Montrer que $(I \setminus \{1\}, *)$ est un groupe commutatif.
- 0,25 pts (b) Montrer que $]1, +\infty[$ est un sous-groupe de $(I \setminus \{1\}, *)$.
- (4) On munit I de la loi de composition interne $\times$ (La multiplication dans $\mathbb{R}$).
- 0,25 pts (a) Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\times$.
- 0,5 pts (b) Montrer que $(I, \times, *)$ est un corps commutatif.

Partie II :

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 0,5 pts (1) Calculer A^2 et A^3 .
- 0,5 pts (2) En déduire que la matrice A est non inversible.

EXERCICE 2 : (3,5 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 0,25 pts (1) (a) Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe $3 + 4i$.
- 0,5 pts (b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E) : 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$$

- (2) Soient a et b les solutions de l'équation (E) avec $\text{Re}(a) < 0$ et soient A et B leurs points images respectifs dans le plan complexe.
- 0,25 pts (a) Vérifier que : $\frac{b}{a} = 1 - i$.
- 0,75 pts (b) En déduire que le triangle AOB est rectangle et isocèle en A .
- (3) Soient C un point du plan différent du point A ayant pour affixe c et D l'image du point B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$; et soit L l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.
- 0,5 pts (a) Déterminer en fonction de c le nombre complexe d affixe du point D .

0,5 pts

(b) Déterminer en fonction de c le nombre complexe l affixe du point L .

0,75 pts

(c) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{l-c}{a-c}$, en déduire la nature du triangle ACL .

EXERCICE 3 : (3 pts)

1 pts

(1) Déterminer tous les nombres entiers naturels m tels que :

$$m^2 + 1 \equiv 0 [5]$$

(2) Soit p un nombre premier tel que $p = 3 + 4k$ où k est un nombre entier naturel. Soit n un nombre entier naturel tel que :

$$n^2 + 1 \equiv 0 [p]$$

0,25 pts

(a) Vérifier que :

$$(n^2)^{1+2k} \equiv -1 [p]$$

0,5 pts

(b) Montrer que n et p sont premiers entre eux.

0,75 pts

(c) En déduire que :

$$(n^2)^{1+2k} \equiv 1 [p]$$

0,5 pts

(d) Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n vérifiant :

$$n^2 + 1 \equiv 0 [p]$$

EXERCICE 4 : (6,25 pts)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 4xe^{-x^2}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

(1) Calculer la limite de f en $+\infty$.

0,75 pts

(2) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,75 pts

(3) Déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ à l'origine du repère puis construire la courbe $(\mathcal{C})$. (On prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm et on admet que le point d'abscisse $\sqrt{3/2}$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$).

0,5 pts

(4) Calculer l'intégrale suivante :

$$a = \int_0^1 f(x) dx$$

Puis en déduire, en centimètre carré, l'aire de la partie plane limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, les deux axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

Partie II :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$$

0,25 pts

(1) (a) Montrer que : $\forall x > 1,$

$$e^{-x^2} < e^{-x}$$

0,25 pts

(b) En déduire la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$.

0,75 pts

(2) Étudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,5 pts

(3) Montrer qu'il existe un nombre réel unique u_n de l'intervalle $]0, 1[$ tel que :

$$f_n(u_n) = 1$$

0,25 pts

(4) (a) Montrer que : $\forall n \geq 2,$

$$f_{n+1}(u_n) = u_n$$

0,75 pts

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

(4) On pose : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$

0,25 pts

(a) Montrer que : $0 < l \leq 1.$

0,25 pts

(b) Montrer que : $\forall n \geq 2,$

$$-\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$$

0,5 pts

(c) En déduire que : $l = 1.$

EXERCICE 5 : (3,75 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

0,25 pts

(1) Montrer que F est impaire.

(2) Pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$ on pose :

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

0,25 pts

(a) Vérifier que : $\forall x > 0,$

$$F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$$

0,5 pts

(b) Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x > 0.$

0,5 pts

(c) En déduire le sens de variations de la fonction F sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,5 pts

(3) (a) En utilisant le Théorème des Accroissements Finis, montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \exists c \in]x, 2x[, \quad F(x) = \frac{x}{\ln(1 + c^2)}$$

0,25 pts

(b) En déduire que : $\forall x > 0$,

$$\frac{x}{\ln(1 + 4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1 + x^2)}$$

0,75 pts

(c) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.

0,75 pts

(d) Montrer que :

$$F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1} \quad \text{et} \quad F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$$

Puis en déduire que l'équation $F(x) = x$ admet une solution unique dans $]0, +\infty[$.