



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2009
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (2,5 pts)

EXERCICE 2 : Les nombres complexes (4 pts)

EXERCICE 3 : Le calcul des probabilités (3 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (10,5 pts)

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

EXERCICE 1 : (2,5 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre de zéro la matrice nulle O et d'unité la matrice I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel. On pose pour tous réels a et b :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$$

On définit l'ensemble V par :

$$V = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

0,5 pts

(1) Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et déterminer une base de V .

0,25 pts

(2) (a) Montrer que V est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,25 pts

(b) Montrer que $(V, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

0,25 pts

(3) (a) Calculer :

$$M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \times M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

0,25 pts

(b) L'anneau $(V, +, \times)$ est-il un corps ?

(4) Soit X une matrice de V telle que :

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = 0.$$

0,5 pts

(b) On suppose que $a^2 - 4b^2 \neq 0$. Montrer que X admet un inverse dans V qu'on déterminera.

EXERCICE 2 : (4 pts)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit u un nombre complexe différent de $(1 - i)$.

0,25 pts

(1) (a) Développer $(iu - 1 - i)^2$.

0,5 pts

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E) : z^2 - 2(u + 1 - i)z + 2u^2 - 4i = 0.$$

(2) Soient les points $A(1 + iu - 2i)$, $B((1 - i)u + 2)$, $U(u)$ et $\Omega(2 - 2i)$.

0,5 pts

(a) Déterminer k l'affixe du point K milieu du segment $[AB]$, puis déterminer le vecteur de la translation qui transforme U en K .

0,5 pts

(b) Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $-\pi/2$. Montrer que : $R(A) = B$.

0,25 pts

(c) En déduire que les droites (ΩA) et (AB) sont perpendiculaires.

0,5 pts

(d) À partir du point U expliquer une méthode de construction des points A et B .

(3) On pose $u = (1 + i)a - 2i$ tel que $a \in \mathbb{R}$.

0,75 pts

(a) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AU}$ en fonction de a .

0,75 pts

(b) En déduire que les points A , B et U sont alignés.

EXERCICE 3 : (3 pts)

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 4$.

- Une urne U_1 contient n boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge et $(n - 1)$ boules noires.
- Une urne U_2 contient n boules indiscernables au toucher : 2 boules rouges et $(n - 2)$ boules noires.
- Une urne U_3 contient n boules indiscernables au toucher : 3 boules rouges et $(n - 3)$ boules noires.

On considère l'expérience suivante : "On choisit une urne parmi les trois urnes précédentes puis on en tire simultanément deux boules".

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

0,25 pts

(1) Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X .

0,75 pts

(2) (a) Montrer que :

$$P[X = 2] = \frac{8}{3n(n-1)}$$

0,75 pts

(b) Montrer que :

$$P[X = 1] = \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$$

0,5 pts

(c) En déduire la loi de probabilité de la variable X .

0,75 pts

(3) Sachant que les deux boules tirées sont rouges, quelle est la probabilité pour qu'elles proviennent de l'urne U_3 ?

EXERCICE 4 : (10,5 pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$$

0,5 pts

(1) (a) Étudier les variations de la fonction g .

0,5 pts

(b) Dresser le tableau de variations de g .

0,5 pts

(2) (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]\ln 4, \ln 6[$. (On prend $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$).

0,5 pts

(b) Étudier le signe de $g(x)$ dans $\mathbb{R}_+$.

(3) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n}) \end{cases}$$

0,5 pts

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \alpha$.

0,25 pts

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

0,25 pts

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

0,5 pts

(d) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie II :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{x^2}.$$

$(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

(1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

0,5 pts

(2) (a) Vérifier que :

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha - 2)}$$

0,75 pts

(b) Montrer que $f'(x) = g(x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$ puis dresser le tableau de variations de f .

1 pts

(3) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha \simeq 1,5$).

Partie III :

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{1 - e^t}{t^2} dt & \text{Si } x > 0 \\ -\ln 2 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

0,5 pts

(1) (a) En utilisant une intégration par parties montrer que : $\forall x > 0$,

$$F(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt.$$

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall x > 0$,

$$e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2.$$

0,5 pts

(c) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

Puis en déduire que la fonction F est continue à droite au point 0.

0,25 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall x > 0$,

$$F(x) \leq \frac{1 - e^x}{2x}.$$

0,25 pts

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

0,5 pts

(3) Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2$$

0,75 pts

(4) (a) Soit x un élément de l'intervalle $]0, +\infty[$. Montrer qu'il existe un réel c de $]0, x[$ tel que :

$$F(x) - F(0) = -\frac{1}{2} x e^{2c}$$

Utiliser le Théorème des Accroissements Finis deux fois.

0,75 pts

(b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$,

$$-\frac{1}{2} e^{2x} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2}.$$

0,25 pts

(c) En déduire que la fonction F est dérivable à droite au point 0 et que :

$$F'_d(0) = -\frac{1}{2}$$