



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2009
- الموضوع -

ذ. سعد شكري

saadchoukri.com

المملكة المغربية

†.XΛΞ† | ΗΥΟΞΘ



وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

†◻◻⊙† | ⊙×◻◻ ◻◻⊙

Λ ∅ ⊙ ⊙ Π Γ Λ ∅ Γ Ж П ∅ ∅ ∅ Λ + ∅ ∅ ∅ +

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3 pts)

EXERCICE 2 : Les nombres complexes (4 pts)

EXERCICE 3 : L'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (3 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (10 pts)

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

EXERCICE 1 : (3 pts)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2. On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont l'élément neutre est :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit F l'ensemble des matrices $M(x, y)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} \quad \text{avec } (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

0,25 pts

(1) (a) Montrer que F est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,5 pts

(b) Montrer que $(F, \times)$ est un groupe non commutatif.

1 pts

(2) Soit G l'ensemble des matrices $M(x, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que G est un sous-groupe du groupe $(F, \times)$.

(3) On pose $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, qu'on le munit de la loi de composition interne $\perp$ définie par :

$$\forall (x, y) \in E, \forall (a, b) \in E, (x, y) \perp (a, b) = \left(ax, bx + \frac{y}{a} \right)$$

Et on considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : (F, \times) &\longrightarrow (E, \perp) \\ M(x, y) &\longmapsto \varphi(M(x, y)) = (x, y) \end{aligned}$$

0,25 pts

(a) Calculer : $(1, 1) \perp (2, 3)$ et $(2, 3) \perp (1, 1)$.

0,5 pts

(b) Montrer que φ est un isomorphisme de $(F, \times)$ vers $(E, \perp)$.

0,5 pts

(c) En déduire la structure de $(E, \perp)$.

EXERCICE 2 : (4 pts)

Soit m un nombre complexe différent de 1.

Partie I :

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation suivante dont l'inconnue est z :

$$(E) : z^2 - (1 - i)(m + 1)z - i(m^2 + 1) = 0$$

0,25 pts

(1) (a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = [(1 + i)(m - 1)]^2$.

0,25 pts

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

0,5 pts

(c) Déterminer la forme algébrique des deux valeurs de m pour lesquelles le produit des racines de l'équation (E) est égal à 1.

1 pts

(2) On pose : $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$. Écrire z_1 et z_2 sous leur forme trigonométrique lorsque $m = e^{i\theta}$ avec $\pi/2 < \theta < \pi$.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectifs $m, z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$.

0,5 pts (1) Déterminer l'ensemble des points M tels que les points M, M_1 et M_2 soient alignés.

0,5 pts (2) (a) Soit R la transformation qui associe à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe z' tel que $z' = 1 - iz$. Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'affixe du centre Ω et une mesure de l'angle.

0,5 pts (b) Montrer que le nombre complexe $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ est imaginaire pur si et seulement si :

$$\operatorname{Re}(m) + \operatorname{Im}(m) = 1$$

($\operatorname{Re}(m)$ est la partie réelle de m , $\operatorname{Im}(m)$ est la partie imaginaire de m).

0,5 pts (c) En déduire l'ensemble des points M tels que Ω, M, M_1 et M_2 soient cocycliques.

EXERCICE 3 : (3 pts)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = 3^n + 2^n + 6^n - 1$$

0,25 pts (1) (a) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, a_n est pair.

0,5 pts (b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles : $a_n \equiv 0[3]$.

(2) Soit p un nombre premier tel que $p > 3$.

0,75 pts (a) Montrer que :

$$2^{p-1} \equiv 1[p], \quad 3^{p-1} \equiv 1[p] \quad \text{et} \quad 6^{p-1} \equiv 1[p]$$

0,75 pts (b) Montrer que p divise a_{p-2} .

0,75 pts (c) Montrer que pour tout nombre entier naturel q , il existe un nombre entier naturel non nul n tel que : $a_n \wedge q = q$, où $a_n \wedge q$ désigne le plus grand commun diviseur de a_n et q .

EXERCICE 4 : (10 pts)

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x(1 - \ln(x))^n & \text{Si } x > 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I :

$(\mathcal{C}_n)$ est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prend $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$.

0,5 pts (1) (a) Montrer que la fonction f_n est continue à droite au point 0. (Poser $x = r^n$).

0,25 pts

(b) Étudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite au point 0.

1 pts

(c) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$$

0,5 pts

(2) (a) Étudier les variations de la fonction f_1 .

0,5 pts

(b) Étudier les variations de la fonction f_2 .

0,25 pts

(3) (a) Étudier la position relative des courbes (C_1) et (C_2) .

0,5 pts

(b) Construire les courbes (C_1) et (C_2) . (On admet que le point $A(1, 1)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C_2)).**Partie II :**On considère la fonction F définie sur $] -\infty, 0]$ par :

$$F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et que : $\forall x < 0$,

$$F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

0,25 pts

(b) En déduire le sens de variation de F sur $] -\infty, 0]$.

0,25 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall x < 0$,

$$\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$$

0,25 pts

(b) Vérifier que la fonction $x \mapsto x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln(x)}{2} \right)$ est une primitive de la fonction f_1 sur $]0, +\infty[$.

0,25 pts

(c) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$$

0,25 pts

(3) On suppose que la fonction F admet une limite finie l quand x tend vers $-\infty$. Montrer que :

$$\frac{3}{8} \leq l \leq \frac{3}{4}$$

Partie III :Pour tout entier naturel non nul n on pose :

$$U_n = \int_1^e f_n(x) dx$$

0,5 pts

(1) (a) Montrer que : $\forall n \geq 1, U_n \geq 0$.

0,5 pts

(b) Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $[1, e]$.

0,25 pts

(c) Montrer que : $\forall n \geq 1, U_{n+1} \leq U_n$.

0,25 pts

(d) En déduire que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall n \geq 1,$

$$U_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}U_n$$

0,5 pts

(b) En déduire en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_1) , (C_2) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

0,75 pts

(3) (a) Montrer que : $\forall n \geq 2,$

$$\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n-1}$$

0,5 pts

(b) Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$.(4) Soit a un nombre réel différent de U_1 . On considère la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\begin{cases} V_1 = a \\ V_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2}V_n, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Pour tout entier naturel non nul n on pose : $d_n = |V_n - U_n|$.

0,25 pts

(a) Montrer que : $\forall n \geq 1,$

$$d_n = \frac{n!}{2^{n-1}}d_1$$

0,25 pts

(b) Montrer que : $\forall n \geq 2,$

$$\frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$$

0,25 pts

(c) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$.

0,25 pts

(d) En déduire que la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est divergente.