



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة الاستدراكية 2008
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants :

EXERCICE 1 : Les nombres complexes (4 pts)

EXERCICE 2 : Les structures algébriques (4,5 pts)

EXERCICE 3 : Le calcul des probabilités (2,5 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (10 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (4 pts)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application r qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_1(z_1)$ tel que :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

Et l'application h qui à tout point $M(z)$ associe le point $M_2(z_2)$ tel que : $z_2 = -2z + 3i$.

On pose : $F = h \circ r$.

0,75 pts

(1) Déterminer la nature de chacune des applications r et h et leurs caractéristiques.

(2) On considère les points $\Omega(i)$ et $A(a)$ tel que a est un complexe donné différent de i .
On pose : $B = F(A)$, $C = F(B)$ et $D = F(C)$.

0,75 pts

(a) Montrer que si le point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par l'application F alors :

$$z' - i = 2e^{4i\pi/3}(z - i)$$

0,5 pts

(b) Vérifier que Ω est le seul point vérifiant $F(\Omega) = \Omega$.

0,5 pts

(3) (a) Déterminer en fonction du nombre complexe a , les nombres complexes b , c et d d'affixes respectifs des points B , C et D .

0,5 pts

(b) Montrer que les points Ω , A et D sont alignés.

0,5 pts

(c) Montrer que le point Ω est le barycentre du système pondéré $\{(B, 4); (C, 2); (D, 1)\}$.

0,5 pts

(d) Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que le point D appartienne à l'axe des réels (des abscisses).

EXERCICE 2 : (4,5 pts)

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$x * y = x + y - 3xy \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

0,5 pts

(1) (a) Vérifier que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (1 - 3x)(1 - 3y) = 1 - 3(x * y)$$

0,5 pts

(b) Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \{1/3\}, *)$ est un groupe commutatif.

0,5 pts

(2) (a) Montrer que l'application φ définie pour tout x réel par : $\varphi(x) = 1 - 3x$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R} \setminus \{1/3\}, *)$ vers $(\mathbb{R}^*, \times)$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty, 1/3[$.

0,5 pts

(c) Montrer que $(]-\infty, 1/3[, *)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{R} \setminus \{1/3\}, *)$.

(3) Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1/3\}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose :

$$x^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$$

0,5 pts

(a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1/3\}, \forall n \in \mathbb{N}, \varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$$

0,5 pts

(b) En déduire $x^{(n)}$ en fonction de x et de n .(4) L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de la loi de composition interne T définie par :

$$xTy = x + y - \frac{1}{3}$$

0,5 pts

(a) Montrer que $(\mathbb{R}, T)$ est un groupe commutatif.

0,5 pts

(b) Montrer que $(\mathbb{R}, T, *)$ est un corps commutatif.**EXERCICE 3 : (2,5 pts)**

Une urne contient 4 boules indiscernables au toucher. Trois boules rouges et une boule blanche.

On tire au hasard les boules de l'urne l'une après l'autre avec remise jusqu'à obtenir deux boules successives de même couleur et on arrête le processus du tirage. Soit X la variable aléatoire égale à l'ordre de la boule de la dernière boule tirée.

(1) Calculer les probabilités suivantes :

0,5 pts

(a) $P[X = 2]$.

0,5 pts

(b) $P[X = 3]$.(2) Soit k un entier naturel non nul.

0,75 pts

(a) Montrer que :

$$P[X = 2k] = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16} \right)^{k-1}$$

0,75 pts

(b) Montrer que :

$$P[X = 2k + 1] = \left(\frac{3}{16} \right)^k$$

EXERCICE 4 : (10 pts)**Partie I :**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I =] - 1/2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x} & \text{Si } x \neq 0 \\ 2 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts

(1) Montrer que f est continue au point 0.(2) Pour tout réel non nul a de l'intervalle I , on considère la fonction numérique h_a

définie par :

$$h_a(x) = (\ln(1 + 2a) - 2a)x^2 - (\ln(1 + 2x) - 2x)a^2$$

0,5 pts

- (a) Calculer $h_a(a)$ et $h'_a(a)$ et en déduire qu'il existe un réel b compris entre 0 et a tel que :

$$\frac{\ln(1 + 2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1 + 2b}$$

0,5 pts

- (b) En déduire que la fonction f est dérivable au point 0 et que $f'(0) = -2$.

0,5 pts

- (3) (a) Montrer que f est dérivable sur $I \setminus \{0\}$ et que :

$$\forall x \in I \setminus \{0\}, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1 + 2x)}$$

$$\text{Où : } g(x) = 2x - (1 + 2x) \ln(1 + 2x).$$

0,5 pts

- (b) Montrer que : $\forall x \in I \setminus \{0\}, g(x) < 0$.

0,5 pts

- (c) En déduire les variations de la fonction f .

0,5 pts

- (4) (a) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -1/2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

0,5 pts

- (b) Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $[1, 2]$ tel que : $f(\alpha) = 1$.

0,5 pts

- (c) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$. On prend $\alpha \simeq 1,3$.

Partie II :

- (1) On pose $J = [1, \alpha]$ et $\forall x \in I, \varphi(x) = \ln(1 + 2x)$.

0,5 pts

- (a) Montrer que φ est dérivable sur I et que : $\forall x \geq 1,$

$$0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

0,5 pts

- (b) Vérifier que $\varphi(\alpha) = \alpha$ et que $\varphi(J) \subset J$.

- (2) On considère la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} U_{n+1} = \ln(1 + 2U_n) \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

0,5 pts

- (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in J$.

0,5 pts

- (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},$

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

0,5 pts

- (c) En déduire que la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Partie III :

(1) On considère la fonction F définie sur I par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

0,5 pts

(a) Montrer que F est dérivable sur I puis calculer $F'(x)$ pour tout x de I .

0,5 pts

(b) En déduire le sens de variation de F sur I .

0,5 pts

(2) (a) Montrer que : $\forall x \geq 1$,

$$F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t} dt$$

0,5 pts

(b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

(3) On suppose que F admet une limite finie l à droite au point $-1/2$.

Et on considère la fonction $\tilde{F}$ définie sur l'intervalle $[-1/2, +\infty[$ par :

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{Si } x \in I \\ l & \text{Si } x = -1/2 \end{cases}$$

0,5 pts

(a) En utilisant le Théorème des Accroissements finis montrer que : $\forall x \in I$,

$$F(x) - l \geq \left(x + \frac{1}{2}\right) f(x)$$

0,5 pts

(b) En déduire que la fonction $\tilde{F}$ est non dérivable à droite au point $-1/2$.