



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2008
- الموضوع -

د. سعد شكري

saadchoukri.com



4 h

مدة الإنجاز

الرياضيات

المادة

9

المعامل

شعبة العلوم الرياضية - (أ) و (ب) - خيار فرنسية

الشعبة

تمت إعادة كتابة هذا الامتحان الوطني من طرف الأستاذ سعد شكري.
قد يتضمن بعض الأخطاء، للتبليغ عنها يمكنكم مراسلتنا عبر البريد
الإلكتروني التالي :

saadchoukri00@gmail.com

Consignes :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants :

EXERCICE 1 : Les structures algébriques (3,25 pts)

EXERCICE 2 : Les nombres complexes (3,75 pts)

EXERCICE 3 : L'arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (3 pts)

EXERCICE 4 : L'analyse (10 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé.

EXERCICE 1 : (3,25 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif, et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle O et d'unité la matrice I :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel. On définit la matrice J par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b\sqrt{3} \\ -\frac{b}{\sqrt{3}} & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

0,75 pts

(1) (a) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0,5 pts

(b) Montrer que la famille (I, J) est une base de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

(2) On pose $E^* = E \setminus \{M(0, 0)\}$, et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E^* définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^* &\longrightarrow E^* \\ a + ib &\longmapsto M(a, b) \end{aligned}$$

0,25 pts

(a) Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

0,5 pts

(b) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E^*, \times)$.

0,5 pts

(3) Montrer que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

0,75 pts

(4) Résoudre dans l'ensemble E l'équation $J \times X^3 = I$, avec $X^3 = X \times X \times X$.

EXERCICE 2 : (3,75 pts)

Soit a un nombre complexe non nul et $\bar{a}$ son conjugué.

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_a) d'inconnue z :

$$(E_a) : \quad iz^2 + (a + \bar{a} - i)z - \bar{a} - ia\bar{a} = 0$$

0,5 pts

(1) (a) Vérifier que $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$ est le discriminant de l'équation (E_a) .

0,5 pts

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_a) .

0,5 pts

(2) Montrer que a est solution de l'équation (E_a) si et seulement si $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Im}(a)$.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On suppose que : $\operatorname{Re}(a) \neq \operatorname{Im}(a)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectifs $a, i\bar{a}$ et $(1 + ia)$.

(1) On pose le nombre suivant :

$$Z = \frac{(1 + ia) - a}{i\bar{a} - a}$$

0,5 pts

(a) Vérifier que :

$$\bar{Z} = \frac{(i - 1)\bar{a} - i}{i\bar{a} - a}$$

0,5 pts

(b) Montrer que les points A , B et C sont alignés si et seulement si $\text{Im}(a) = 1/2$.

(2) On suppose ici que $\text{Im}(a) \neq 1/2$.

Considérons les rotations R_1 et R_2 , toutes deux centrées en A , d'angles respectifs $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Notons B' l'image de B par R_1 , C' l'image de C par R_2 , et E le milieu de $[BC]$.

0,5 pts

(a) Déterminer b' et c' , les affixes respectifs des points B' et C' .

0,75 pts

(b) Montrer que les droites (AE) et $(B'C')$ sont orthogonales et que $B'C' = 2AE$.

EXERCICE 3 : (3 pts)

Partie I :

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$$(E) : 35u - 96v = 1$$

0,25 pts

(1) Montrer que le couple $(11, 4)$ est une solution particulière de (E) .

0,5 pts

(2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) .

Partie II :

On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation :

$$(F) : x^{35} \equiv 2[97]$$

(1) Soit x une solution de l'équation (F) .

0,5 pts

(a) Montrer que le nombre 97 est premier et que les nombres x et 97 sont premiers entre eux.

0,5 pts

(b) Montrer que : $x^{96} \equiv 1[97]$.

0,5 pts

(c) Montrer que : $x \equiv 2^{11}[97]$.

0,25 pts

(2) Montrer que si le nombre entier x vérifie la condition $x \equiv 2^{11}[97]$, alors x est solution de l'équation (F) .

0,5 pts

(3) Montrer que l'ensemble solution de l'équation (F) est l'ensemble des nombres entiers naturels qui s'écrit sous la forme $11 + 97k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 4 : (10 pts)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = 2x - e^{-x}$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 pts (1) (a) Calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x$$

Puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

0,5 pts (b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, puis dresser le tableau de variations de f .

0,5 pts (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+$ telle que $0 < \alpha < 1$.

0,5 pts (d) Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

0,5 pts (2) Tracer la courbe (C_f) . On prend $\alpha \simeq 0,4$.

Partie II :

On considère les deux fonctions φ et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

0,5 pts (1) (a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists c \in]0, x[\quad \text{tel que} \quad \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$$

0,5 pts (b) En déduire que : $\int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$

0,5 pts (2) (a) Montrer que : $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt$

0,5 pts (b) Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = f(x)$.

0,5 pts (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique $\beta \in]\alpha, 1[$.

0,5 pts (3) (a) Montrer que la fonction φ est continue à droite au point 0.

0,5 pts (b) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,$

$$\varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$$

0,75 pts (c) Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,$

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$$

0,5 pts

(d) Montrer que : $\varphi([0, 1]) \subset [0, 1]$.

0,5 pts

(4) (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3}$$

0,25 pts

(b) Montrer que : $\forall x \in]0, 1[$,

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$$

0,5 pts

(c) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = x \iff g(x) = 0$.(5) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{2}{3} \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

0,5 pts

(a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

0,5 pts

(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

0,5 pts

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.