



Sujet d'étude 14 – Première Bac sciences Maths

Chapitre. Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Compilé par le prof. Saad Choukri

○ Problème (sur la fonction σ)

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note D_n l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$ et $\sigma(n)$ la somme des éléments de D_n , c'est-à-dire

$$\sigma(n) = \sum_{d \in D_n} d.$$

Exemple :

$$\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18.$$

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que n est premier si, et seulement si, $\sigma(n) = n + 1$.

② Pour p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sigma(p^\alpha)$.

③ Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$ et soit f l'application définie par

$$f : D_a \times D_b \rightarrow D_{ab}, \quad (k, l) \mapsto f(k, l) = kl.$$

a) Montrer que f est injective, c'est-à-dire : pour tous $(k, l), (k', l')$ de $D_a \times D_b$, on a

$$f(k, l) = f(k', l') \iff (k, l) = (k', l').$$

b) Soit $d \in D_{ab}$, on pose $k = d \wedge a$ et $l = d \wedge b$. Montrer que $d = kl$ et conclure que f est bijective.

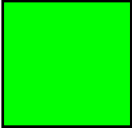
c) En déduire que $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.

④ En déduire que pour tout entier $s \geq 1$ et tous $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux deux à deux, on a

$$\sigma \left(\prod_{k=1}^s a_k \right) = \prod_{k=1}^s \sigma(a_k).$$

⑤ Pour tout entier $n \geq 2$, exprimer $\sigma(n)$ à partir de la décomposition en facteurs premiers de n .

Application : Un entier non nul n est dit parfait lorsque $\sigma(n) = 2n$ (par exemple 6 est un nombre parfait).



- ⑥ Montrer que les nombres parfaits pairs sont les nombres d'Euclide, à savoir les entiers de la forme $E_k = 2^k(2^{k+1} - 1)$ où $k \in \mathbb{N}^*$ avec $2^{k+1} - 1$ premier.

*

* *

Fin