



Sujet d'étude 6 – Première Bac sciences Maths

Chapitre. Suites numériques

Compilé par le prof. Saad Choukri

○ Problème (sur les suites récurrentes linéaires de second ordre)

– Partie A –

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites (u_n) (que nous noterons tout simplement u) définies par

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- ①
 - a) Montrer que si u et v sont deux suites de $\mathcal{U}$, alors la suite $\alpha u + \beta v = (\alpha u_n + \beta v_n)$ appartient à $\mathcal{U}$ pour tout couple de nombres réels (α, β) .
 - b) Montrer que tout élément de $\mathcal{U}$ est totalement défini par la donnée de u_0 et u_1 .
- ② On suppose que les suites v et w sont des suites de $\mathcal{U}$ non proportionnelles. Soit u une suite de $\mathcal{U}$.
Montrer qu'il existe un unique couple (α, β) de nombres réels tels que $\alpha v_0 + \beta w_0 = u_0$ et $\alpha v_1 + \beta w_1 = u_1$. En déduire que l'ensemble $\mathcal{U}$ est l'ensemble des suites $\alpha v + \beta w$.
- ③
 - a) Déterminer r de façon qu'il soit la raison d'une suite géométrique de terme initial 1 et appartenant à $\mathcal{U}$.
 - b) Montrer que les deux suites géométriques obtenues dans a) ne sont pas proportionnelles.
 - c) En déduire l'expression générale d'une suite quelconque de $\mathcal{U}$.

– Partie B –

Soit u la suite définie par

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.

- ① Montrer que la suite u est positive à termes entiers et croissante.
- ② On définit la suite v par son terme général $v_n = u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Expliciter le terme général v_n en fonction de n .

- ③ a) Montrer que

$$(\mathcal{R}_1), \quad v_{2n}^2 = v_{2n-1}v_{2n+1} - 1$$

pour tout $n \geq 1$.

- b) Montrer que

$$(\mathcal{R}_2), \quad v_{2n+1}^2 = v_{2n}v_{2n+2} + 1$$

pour tout $n \geq 1$.

- ④ En déduire que

$$(\mathcal{R}_3), \quad (u_{2n+1} - u_{2n-1})^2 = u_{2n-1}u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

- ⑤ a) Montrer que

$$(\mathcal{R}_4), \quad (u_{2n+1} + u_{2n-1})^2 = 5u_{2n-1}u_{2n+1} + u_{2n-1} + u_{2n+1}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

- b) Démontrer que

$$(\mathcal{R}_5), \quad (u_{2n-1} + u_{2n+1})(u_{2n-1} + u_{2n+1} - 1) = 5u_{2n-1}u_{2n+1}$$

pour tout entier $n \geq 1$.

– Partie C –

- ① À partir de $(\mathcal{R}_5)$, démontrer que si le terme u_{2n-1} est premier, alors celui-ci divise l'un des deux nombres u_{2n+1} ou $u_{2n+1} - 1$.

- ② (Premier cas) u_{2n-1} divise u_{2n+1} .

- a) Montrer qu'il existe un entier $q > 1$ tel que

$$(q^2 - 3q + 1)u_{2n-1} = q + 1$$

- b) Quelles sont les valeurs possibles de q ?

c) Le terme u_{2n-1} est-il premier ?

③ (Second cas) u_{2n-1} divise $u_{2n+1} - 1$.

a) Montrer qu'il existe un entier $q' > 1$ tel que

$$((q')^2 - 3q' + 1)u_{2n-1} = 4 - q'$$

b) Montrer que q' admet une seule valeur possible.

c) Le terme u_{2n-1} est-il premier ?

④ Un terme d'indice impair de la suite u peut-il être premier ? Justifier.

– Partie D –

① En utilisant $(\mathcal{R}_2)$, démontrer que

$$(\mathcal{R}_8), \quad [(u_{2n+2} + 1) + (u_{2n} + 1)]^2 = 5(u_{2n} + 1)(u_{2n+2} + 1) + 1$$

puis déduire la relation

$$(\mathcal{R}_9), \quad 5u_{2n}u_{2n+2} = (u_{2n} + u_{2n+2} - 2)(u_{2n} + u_{2n+2} + 1)$$

② Montrer que si u_{2n} est premier, alors il divise $u_{2n+2} - 2$ ou $u_{2n+2} + 1$.

③ Déterminer tous les termes premiers de la suite u .

*

* *

Fin