



Sujet d'étude 5 – Première Bac sciences Maths

Chapitre. Généralités sur les fonctions numériques

Compilé par le prof. Saad Choukri

○ *Problème (sur les fonctions polynomiales)*

On considère une fonction polynomiale P non nulle de degré $n \geq 1$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

où $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ avec $a_n, a_0 \neq 0$. Soit Q la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par

$$Q(x) = P(x)P(x+2) + P(x^2)$$

① Montrer que si $a_n \neq -1$, alors Q est de degré $2n$.

② On suppose par la suite que P vérifie la propriété

$$P(x)P(x+2) + P(x^2) = 0, \quad (\mathcal{R})$$

On se propose de montrer que si P admet une racine a , alors $a = 1$.

a) Montrer que a^2, a^4 sont des racines de P .

b) Prouver que pour tout entier naturel k , a^{2^k} est une racine de P .

c) Dédurre de ce qui précède que si $|a| \neq 1$, alors P possède une infinité de racines. Que peut-on dire de P dans cas ?

d) En déduire que $|a| = 1$.

e) Montrer que $(a-2)^2$ est une racine de P en utilisant la relation $(\mathcal{R})$.

f) Conclure.

*

* *

Fin