



Sujet d'étude 3 – Première Bac sciences Maths

Chapitre. Applications

Compilé par le prof. Saad Choukri

○ Problème (Applications itérées)

On étudie dans ce problème quelques propriétés des itérées d'une application. Pour tout ensemble E , pour toute application $f : E \longrightarrow E$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que f^n désigne la composée $f \circ \dots \circ f$ (n termes) avec par convention $f^0 = \text{Id}_E$. Lorsque f est bijective, on peut également noter f^{-n} la composée $f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- ① Montrer que la suite $(f^n(E))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion, i.e. que $f^{n+1}(E) \subset f^n(E)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ② Dans cette question, on suppose que $f^p(E) = f^{p+1}(E)$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$.
 - a) Montrer que pour tout entier $k \geq p$, $f^k(E) = f^p(E)$.
 - b) Montrer que si f est injective, alors f est bijective.
- ③
 - a) Donner un exemple d'ensemble E et d'application injective $f : E \longrightarrow E$ pour lesquels la suite $(f^n(E))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante au sens de l'inclusion.
 - b) Soient E un ensemble fini et $f : E \rightarrow E$ une application. Montrer que $f^p(E) = f^{p+1}(E)$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, puis que $f|_{f^p(E)}$ est une permutation de $f^p(E)$.
 - c) (Difficile) Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que l'ensemble $\mathcal{F} = \{f^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est fini. En appliquant le résultat de la question b) à l'application $\varphi \mapsto \varphi^2$ sur $\mathcal{F}$, montrer que $\mathcal{F}$ contient une application idempotente g , i.e. pour laquelle $g^2 = g$.

*

* *

Fin