



Sujet d'étude 2 – Première Bac sciences Maths

Chapitre. Ensembles

Compilé par le prof. Saad Choukri

○ Problème (Sur les ensembles transitifs)

Soit E un ensemble éventuellement vide, dont les éléments sont des ensembles. On dit que E est transitif si

$$\forall x, \quad x \in E \implies x \subset E.$$

① Les ensembles suivants sont-ils transitifs (où $\emptyset$ désigne l'ensemble vide) :

a) $E_1 = \emptyset$

b) $E_2 = \{\emptyset\}$

c) $E_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

d) $\{\{\emptyset\}\}$

② Soit X un ensemble quelconque. On note $\mathcal{P}_0(X) = X$ et $\mathcal{P}_1(X) = \mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X . On définit alors par récurrence sur n , pour tout $n \geq 1$,

$$\mathcal{P}_{n+1}(X) = \mathcal{P}(\mathcal{P}_n(X)).$$

a) Soit $X = \{1, 2\}$. Déterminer $\mathcal{P}_2(X)$.

b) Déterminer $\mathcal{P}_1(\emptyset), \mathcal{P}_2(\emptyset), \mathcal{P}_3(\emptyset)$.

c) Montrer que si X est transitif, alors l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ est transitif.

d) Montrer que si X est transitif, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n(X)$ est transitif.

③ Montrer que si E est transitif, alors $E \cup \{E\}$ l'est également.

④ Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille (finie ou infinie) d'ensembles transitifs. Montrer que les ensembles $\bigcup_{i \in I} E_i$ et $\bigcap_{i \in I} E_i$ sont transitifs.

*

* *

Fin