



Sujet d'étude 1 – Première Bac sciences Maths

Chapitre. Logique et raisonnements

Compilé par le prof. Saad Choukri

○ Problème (Inégalité arithmético-géométrique)

Soient $n \geq 1$ un entier naturel, $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels positifs. On propose de démontrer que

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \quad (*)$$

On prouve le résultat d'abord dans des cas particuliers $n = 2, 3, 4$ puis on généralise l'inégalité pour $n \geq 2$ quelconque par une récurrence (dite de Cauchy). Puis on étudie le cas d'égalité. Enfin, on donne quelques applications de l'inégalité arithmético-géométrique.

① (Quelques cas particuliers de l'inégalité arithmético-géométrique)

- a) Justifier que le cas $n = 1$ dans l'inégalité (*) est en fait une égalité.
- b) Soient a et b deux nombres réels positifs. Montrer que

$$\left(\frac{a + b}{2} \right)^2 \geq ab$$

C'est-à-dire le cas $n = 2$ dans l'inégalité (*).

- c) En déduire que pour a, b, c et d quatre réels positifs, on a

$$\left(\frac{a + b + c + d}{4} \right)^4 \geq abcd$$

Il s'agit du cas $n = 4$ dans l'inégalité.

- d) En déduire que pour a, b et c trois réels positifs, on a

$$\left(\frac{a + b + c}{3} \right)^3 \geq abc$$

Il s'agit du cas $n = 3$ de l'inégalité (*).

Indication. Choisir le réel d judicieusement dans le résultat de la question précédente.

② Pour un entier $n \geq 1$, on nomme $\mathcal{P}(n)$ la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \left(\forall a_1, \dots, a_n \geq 0 : \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \right)$$

Nous allons utiliser une récurrence suivant le schéma $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(2n)$ pour tout entier $n \geq 1$ et une descente $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n-1)$ pour tout entier $n \geq 2$.

a) Justifier que le schéma de récurrence ainsi décrit permet de couvrir l'ensemble $\mathbb{N}^*$ tout entier; c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

b) (Hérédité) L'initialisation de récurrence a été déjà vérifiée dans la question 1.

i. Montrer l'implication $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(2n)$ pour tout entier $n \geq 1$.

ii. Prouver l'implication $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n-1)$ pour tout entier $n \geq 2$.

c) Conclure

③ Dans cette question nous allons chercher le cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique.

a) Vérifier que le cas $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ est un cas d'égalité dans (*).

Nous allons prouver par la suite que c'est le seul cas d'égalité.

b) Montrer que pour $i \neq j$ dans $\{1, 2, \dots, n\}$, si on remplace deux nombres différents a_i et a_j par $(a_i + a_j)/2$, la valeur de $a_1 a_2 \dots a_n$ augmente strictement.

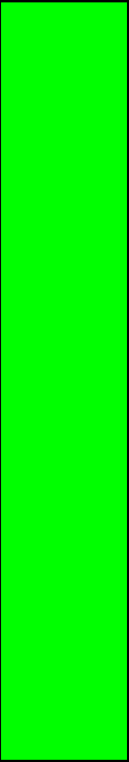
c) Conclure.

④ (Quelques applications)

a) Soient $n \geq 1$ un entier naturel et $a_1, \dots, a_n \geq 0$ des nombres réels strictement positifs.

• Montrer que

$$\left(a_1 + a_2 + \dots + a_n \right) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$



b) Soient $x_1, \dots, x_{2026}$ des nombres réels positifs vérifiant

$$x_1 x_2 \dots x_{2026} = 1$$

- Montrer que

$$\prod_{k=1}^{2026} (4 + x_k) \geq 5^{2026}$$

c) Soient u, v et w trois réels strictement positifs.

- Montrer que

$$\frac{u^3}{v^2} + \frac{v^3}{w^2} + \frac{w^3}{u^2} \geq u + v + w$$

d) (Inégalité de Nesbitt) Soient a, b et c trois nombres réels strictement positifs.

- Montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

*

* *

Fin