



Dénombrement – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (sur le cardinal).

Dans une entreprise, il y a 800 employés.

- 300 sont des hommes,
- 352 sont membres d'un syndicat,
- 424 sont mariés,
- 188 sont des hommes syndiqués,
- 166 sont des hommes mariés,
- 208 sont syndiqués et mariés,
- 144 sont des hommes mariés syndiqués.

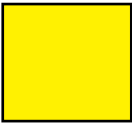
Combien y a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

○ Exercice 2 (Comptage d'anagrammes).

- ① Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot *ÉLÈVE* ? Même question en effaçant les accents ?
- ② Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot *MATHÉMATIQUES* ?

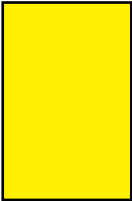
○ Exercice 3 (Comptage de diagonales).

Soit (P) un polygone convexe à n sommets.



- Combien ce polygone a-t-il de diagonales ? En combien de points distincts des sommets se coupent-elles au maximum ?

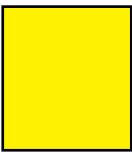
○ Exercice 4 (sur l'ensemble des parties d'un ensemble).



Soit E un ensemble fini à n éléments (où $n \in \mathbb{N}^*$).

- Calculer $S_1 = \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(X \cap Y)$ et $S_2 = \sum_{(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2} \text{card}(X \cup Y)$.

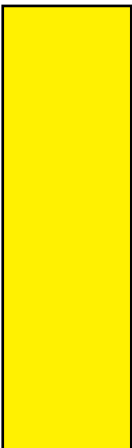
○ Exercice 5 (Utilisation des combinaisons).



À l'écrit d'un examen, on doit traiter 8 exercices au choix parmi 10.

- Sachant que 2 exercices sont obligatoires; Combien y a-t-il de choix possibles ?

○ Exercice 6 (Une identité combinatoire 1).



Soient $1 \leq p \leq n$ deux entiers naturels non nuls.

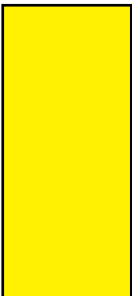
- ① Montrer que

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

- ② En déduire la formule suivante,

$$\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} = n \times 2^{n-1}$$

○ Exercice 7 (Une identité combinatoire 2).



Soient $1 \leq p \leq n$ deux entiers naturels non nuls.

- Donner une forme close de la sommation suivante;

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \times \binom{n-1}{p-1}$$



○ Exercice 8 (Identité de Pascal).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et $p \in \{0, 1, \dots, n\}$.

- En utilisant une méthode combinatoire, montrer que

$$\binom{n}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

○ Exercice 9 (Une application arithmétique).

Soit $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ un couple d'entiers naturels.

- ① Montrer l'entier

$$(x+1)^2 - nx - 1$$

est un multiple de x^2 .

Indication. Utiliser la formule du binôme de Newton.

- ② En déduire le reste de la division euclidienne de 4^{2012} par 9.

○ Exercice 10.

Une grenouille monte un escalier de 13 marches. Elle ne peut progresser que par bonds d'une ou deux marches.

- De combien de façons différentes peut-elle arriver au sommet de l'escalier ?
Attention ! On veut que la grenouille arrive " pile " sur la treizième marche.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Sur les permutations).

Chaque jour, au dessert, maman donne un fruit. Elle dispose de 3 pommes semblables, de 5 poires semblables, de 2 pêches semblables et d'une orange.

- De combien de façons peut-elle donner tous ces fruits sur une période de 11 jours ?

○ Exercice 12 (Combinaisons avec répétitions).

- De combien de manières peut-on mettre 10 pièces de monnaie dont 5 sont identiques et 5 autres différentes dans 5 poches ?



○ Exercice 13 (Un double comptage).

Soit $n \geq 1$ un entier naturel.

- En utilisant une approche combinatoire, prouver que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

○ Exercice 14 (sur les permutations circulaires).

Soit $n \geq 1$ un entier naturel.

- De combien de façons peut-on mettre autour d'une table ronde 20 personnes (on considère que deux arrangements sont semblables s'il existe une rotation qui passe de l'un à l'autre) ?

○ Exercice 15 (Combinaisons).

Dans un sac il y a n paires de chaussures différentes.

- De combien de façons peut-on extraire du sac $2k$ chaussures ($2k \leq n$) de sorte qu'il soit impossible de composer à partir d'elles aucune paire ?

○ Exercice 16 (Recherche d'invariant).

On considère la grille 4×4 suivante :

4	6	1	12
2	10	8	3
5	-6	x	3
2	1	y	2

Chaque case contient un entier relatif, à l'exception de deux cases contenant des valeurs inconnues x et y . On considère l'opération suivante : choisir deux cases adjacentes (qui partageant un côté commun) et ajouter un même entier relatif k aux nombres inscrits dans ces deux cases.

- Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur $x - y$ pour qu'il soit possible, après un nombre fini d'opérations, d'obtenir une grille dont toutes les cases contiennent 0 .



○ Exercice 17 (Nombre de surjections).

Soit $n \geq 1$ un entier naturel.

- Déterminer le nombre d'applications $f : \{1, 2, \dots, n + 1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ qui sont surjectives.

○ Exercice 18 (Une construction combinatoire).

On considère un polygone régulier à 2^{2026} côtés. Hiba souhaite numéroter tous ses sommets de sorte que

- Seuls les chiffres 1 et 2 soient utilisés;
- Chaque sommet porte un nombre formé de 2026 chiffres;
- Deux sommets distincts portent des nombres distincts;
- Les nombres de deux sommets consécutifs diffèrent d'un seul chiffre.

Une telle numérotation est-elle possible ? Justifier.

* *

*

Fin