



Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ – Série d'exercices 2

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Utilisation des congruences 1).

- ① Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 3^n par 8.
- ② On pose $A_n = n \times 3^n - 9n + 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que A_n est divisible par 8 ?

○ Exercice 2 (Utilisation des congruences 2).

- ① Déterminer suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5. Puis en déduire que

$$2^{2024} \equiv 1 \pmod{5}$$

- ② Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \equiv 2 \pmod{5}$. On pose

$$V_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Montrer que l'entier V_{2023} est divisible par 5.

(b) Déterminer tous les entiers naturels n pour que V_n soit divisible par 5.



○ Exercice 3 (Utilisation des congruences 3).

- ① Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$3x \equiv 8 \pmod{10} \iff x \equiv 6 \pmod{10}$$

et que

$$x^2 \equiv 6 \pmod{10} \iff (x \equiv 4 \pmod{10} \text{ ou } x \equiv 6 \pmod{10}).$$

- ② On pose

$$N = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2, \quad \text{où } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Montrer que

$$N \equiv 0 \pmod{10} \iff (n \equiv 3 \pmod{10} \text{ ou } n \equiv 5 \pmod{10}).$$

(b) En déduire tous les multiples de 10, plus petits que 5000 et qui s'écrivent comme somme de trois carrés parfaits consécutifs.

○ Exercice 4 (Sur la division euclidienne).

- ① Soit a un entier naturel.

- Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de a^3 par 7.

- ② On désigne par $[a]$ la partie entière de a et par $\sqrt[3]{b}$ l'unique réel c vérifiant $c^3 = b$ où $b \geq 0$ un nombre réel positif.

- Montrer que

$$[\sqrt[3]{7n+2}] = [\sqrt[3]{7n+3}]$$

○ Exercice 5 (Algorithme d'Euclide étendu).

- ① Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E) : 3x - 2y = 5$.

- ② Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de (E) .

- Déterminer le plus petit entier naturel $x \geq 2023$, tels que $y^2 \equiv 15x \pmod{41}$.



○ Exercice 6 (Sur le nombre de diviseurs d'un entier).

① On considère l'entier naturel $N = 2^\alpha \times 3^\beta$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$.

On désigne par N_1 le nombre de diviseurs positifs de N et par N_2 celui de N^2 .

- Déterminer les valeurs possibles de (α, β) , sachant que $N_2 = 3N_1$.

② Un entier naturel n admet seulement deux diviseurs premiers et différents.

- Déterminer ce nombre, sachant que le nombre de ses diviseurs positifs est 6 et que leur somme est 28.

○ Exercice 7 (Sur les systèmes d'énumération 1).

Soit $b \geq 6$ un entier naturel. On pose $N = 1540^{(b)}$ l'écriture de N dans la base b , c'est-à-dire $N = b^3 + 5b^2 + 4b$.

① Montrer que N est divisible par b , $b + 1$ et $b + 4$.

② Existent-ils des valeurs de b pour lesquelles N est divisible par $b - 1$?

○ Exercice 8 (Sur les systèmes d'énumération 2).

① Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $(E) : 20x - 9y = 2$.

② Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de (E) tels que $x \wedge y = 2$.

③ Soit N un entier naturel tel que

$$N = \overline{bbaa}^{(4)} = \overline{ca5}^{(6)} \quad \text{avec } c \neq 0.$$

- Montrer que $a + 5$ est divisible par 4, puis déterminer les valeurs de a , b et c .

○ Exercice 9 (Nombres de Mersenne).

Un nombre de Mersenne s'écrit sous la forme $M_n = 2^n - 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

① Calculer les six premiers nombres de Mersenne. Que constatez-vous ?

② Montrer que si M_n est premier alors n l'est aussi. (Raisonner par contraposition)



- ③ La réciproque de l'implication précédente est-elle vraie ? Justifier la réponse.

○ Exercice 10 (Nombres de Fermat).

- ① Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^m + 1$ est premier, alors $m = 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

- ② Un nombre de Fermat s'écrit sous la forme

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

où $n \in \mathbb{N}$.

Soient m et n deux entiers naturels tels que $n < m$. Posons $m = n + k$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que F_n divise $F_{n+k} - 2$.
- (b) En déduire que F_n et F_{n+k} sont premiers entre eux.
- (c) Énoncer le résultat démontré.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Sur les carrés parfaits).

- Montrer que le produit de quatre entiers naturels consécutifs non nuls ne peut pas être un carré parfait.

○ Exercice 12 (Sur les cubes parfaits).

Soit $a \geq 2$ un cube parfait.

- Montrer l'entier

$$A = a^2 + 3a + 3$$

ne peut pas être un cube parfait.

○ Exercice 13 (Sur les triplets pythagoriciens).

Un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ est dit pythagorien si

$$x^2 + y^2 = z^2$$



- Montrer que si (x, y, z) est un triplet pythagoricien, alors xyz est divisible par 60.

○ Exercice 14 (Sur les puissance de 2).

- Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'entier 2^n ne peut se terminer par quatre chiffres égaux.

○ Exercice 15.

La somme de cent entiers naturels inférieurs à 100 est égale à 200.

- Démontrez que l'on peut en extraire quelques-uns dont la somme est égale à 100.

○ Exercice 16.

Soient a et b deux entiers naturels tels que

$$a^2 + b = 2025$$

- Déterminer tous les couples (a, b) pour lesquels le produit ab est maximal.



Diophante (photo récente)

* *
*

Fin