



Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1.

Soit $m \geq 1$ un entier tel que $2^m + 1$ soit un nombre premier.

- ① Montrer qu'il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant

$$m = 2^p \times (2q + 1)$$

- ② En déduire que m est une puissance de 2.

○ Exercice 2 (Nombres premiers entre eux).

Soient a et b deux entiers.

- Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si a^{2026} et b^{2027} sont premiers entre eux.
- Prouver que a et b sont premiers entre eux si et seulement si ab et $a + b$ sont premiers entre eux.

○ Exercice 3 (Sur la divisibilité).

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$.

- ① Montrer que 3 divise $ab(a^2 - b^2)$.
- ② Montrer que 6 divise $a^3 - a$.



○ Exercice 4 (Utilisation de la congruence 1).

Soient a, a', b, b', c et c' six entiers relatifs et $n \geq 1$ un entier tels que n divise $a - a', b - b'$ et $c - c'$.

- ① Montrer n divise $abc - a'b'c'$
- ② Montrer que n divise $(abc)^{2026} - (a'b'c')^{2026}$.

○ Exercice 5 (Utilisation de la congruence 2).

Soient x et y deux entiers relatifs.

- Montrer que 7 divise x et y si et seulement si 7 divise $x^2 + y^2$.

Indication. Utiliser un tableau de congruence.

○ Exercice 6 (Une équation diophantienne 1).

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que

$$x^3 - y^3 = 469$$

○ Exercice 7 (Décomposition en facteurs premiers).

Déterminer le plus grand entier k tel que k^3 divise l'entier $N = 81648$.

○ Exercice 8 (Utilisation de la congruence 3).

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H(n) = 2^n + 4^n + 4^n$$

- ① Montrer que
$$H(n+3) \equiv H(n) \pmod{7}$$
- ② En déduire les valeurs des entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que 7 divise $H(n)$.

○ Exercice 9 (Sur les classes d'équivalence).

Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation

$$x^2 - x = \bar{5}$$



○ Exercice 10.

Soient a, b, c et d quatre entiers relatifs. On suppose de plus que $ad + bc \neq 0$ divise chacun parmi les entiers a, b, c et d .

- Prouver que

$$ad + bc = \pm 1$$

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Une équation diophantienne 2).

- Résolvez en entiers naturels l'équation

$$3^{2^m} + 1 = n^2$$

○ Exercice 12 (Un jeu mathématique).

Deux personnes jouent au jeu suivant : le premier joueur écrit un chiffre quelconque, le second y ajoute à gauche ou à droite un chiffre de plus, le premier ajoute au nombre obtenu un chiffre de plus etc.

- Démontrez que le premier joueur peut choisir une stratégie telle qu'aucun nombre obtenu après que le second joueur ait joué ne soit le carré d'un nombre entier.

○ Exercice 13.

- Existe t-il un polygone convexe ayant exactement 1974 diagonales ?

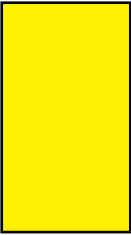
○ Exercice 14 (Sur la somme des chiffres d'un entier).

Soit A la somme des chiffres du nombre 4444^{4444} , B est la somme des chiffres du nombre A .

- Trouvez la somme des chiffres du nombre B .



○ Exercice 15.

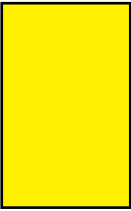


- L'entier

$$N = 7^{7^7} - 7^{7^7}$$

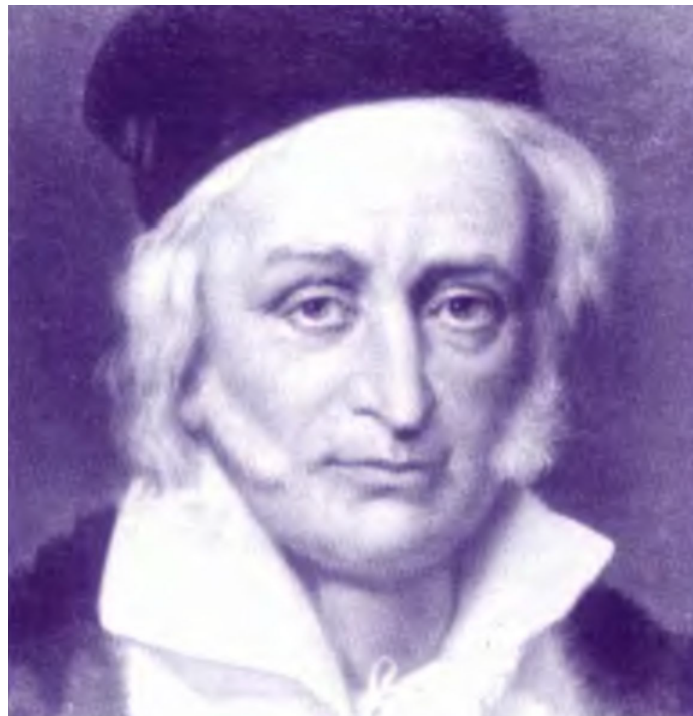
est il divisible par 100 ?

○ Exercice 16.



À propos de 1998 certains nombres entiers, on sait que la somme de 1997 nombres arbitrairement choisis parmi eux est toujours divisible par 5.

- Démontrez qu'alors tous ces nombres sont divisibles par 5.



Gauss

* *

*

Fin