



Représentation graphique d'une fonction numérique – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Extrema d'une fonction).

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - ax}{x^2 - 4x + 3}$ où $a \in \mathbb{R}$.

- ① Déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .
- ② Déterminer les réels a pour lesquels f
 - (a) N'admet pas d'extremums.
 - (b) Admet uniquement un minimum.
 - (c) Admet un minimum et un maximum.

○ Exercice 2 (Étude d'une fonction numérique 1).

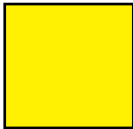
On considère la fonction

$$f : x \mapsto (x - 1)\sqrt{2 - x}$$

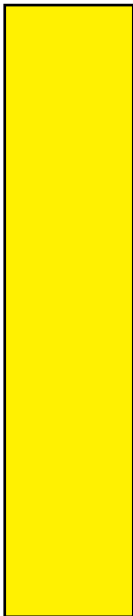
- ① Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② Étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 2$, puis interpréter le résultat obtenu géométriquement.
- ③ (a) Justifier que f est dérivable sur $D_f \setminus \{2\}$, puis montrer que

$$\forall x \in D_f \setminus \{2\}, \quad f'(x) = \frac{-3x + 5}{2\sqrt{2 - x}}.$$

- (b) Dresser le tableau de variation de f en justifiant votre réponse.

- 
- ④ Montrer qu'il existe deux tangentes (T_1) et (T_2) à (C_f) passant par l'origine du repère (donner l'équation cartésienne de chacune).

○ Exercice 3 (Étude d'une fonction numérique 2).



On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

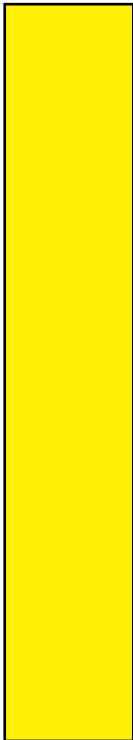
- ① (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}.$$

(b) Montrer qu'il existe une tangente et une seule à (C_f) parallèle à la droite (D) d'équation $y = x + 4$, puis écrire l'équation de cette tangente.

- ② Calculer les limites de f aux bornes de D_f , puis dresser son tableau de variation.
- ③ Déterminer les extremums de f en précisant la nature de chacun.

○ Exercice 4 (Représentation graphique d'une fonction numérique).



Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

et soit $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- ① Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}$.
- ② Donner le tableau de variations de la fonction f .
- ③ On considère la parabole Γ d'équation $y = x^2$ et la parabole $\mathcal{T}$ d'équation $y = x^2 + 1$.
- (a) Étudier la position relative des deux courbes $\mathcal{C}$ et Γ .
- (b) Étudier la position relative des deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.
- (c) Tracer les courbes $\mathcal{C}$, Γ et $\mathcal{T}$ dans le même repère.



○ Exercice 5 (Une courbe possédant trois points d'inflexion).

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \frac{8x}{3x^2 + 1}$$

et soit $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- ① Étudier les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}$.
- ② Donner le tableau de variations de la fonction f .
- ③ (a) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ dans le point O .
(b) Construire la courbe $\mathcal{C}$.

○ Exercice 6 (Tracé d'une courbe 1).

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $] -1, 1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

○ Exercice 7 (Une fonction trigonométrique).

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin(x) + \sqrt{3} \cos(x)$$

- ① Montrer que la fonction f est 2π -périodique.
- ② Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
- ③ Soit $\mathcal{C}'$ la courbe de la restriction de f sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
 - (a) Montrer que la courbe $\mathcal{C}'$ possède deux points d'inflexion A et B .
 - (b) Déterminer les équations des deux tangentes $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ à la courbe $\mathcal{C}'$ aux deux points A et B .
 - (c) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.



○ Exercice 8 (Résolution graphique d'équations).

Résoudre graphiquement les équations suivantes;

①

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

②

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + x}} = x$$

③

$$\cos(x) - \sin(x) = x$$

○ Exercice 9 (Résolution graphique d'une inéquation).

Résoudre graphiquement l'inéquation suivante;

$$(I), \quad \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \geq 1 + x$$

○ Exercice 10 (Tracé d'une courbe 2).

- Tracer la courbe de la fonction $s : x \in [-4\pi, 4\pi] \mapsto x + \sin(x)$ dans un repère orthonormé.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Recherche d'un maximum).

Soient α, β et γ les mesures des angles d'un triangle.

- Déterminer la valeur maximale de

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma)$$

Indication. Étudier la fonction $x \mapsto -\cos(a) \cos(x) \cos(x + a)$ où a un réel de l'intervalle $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.



○ Exercice 12 (Une inégalité géométrique).

Soit s l'aire d'un triangle et p son demi-périmètre.

- Montrer que

$$s \leq \frac{\sqrt{3}}{9} p^2$$

puis caractériser le(s) cas d'égalité.

○ Exercice 13 (Minimisation d'un périmètre).

- Parmi tous les triangles rectangles ayant même aire, quel est celui ayant un périmètre minimal.

○ Exercice 14 (Un système à trois inconnues).

On considère le système (S) à trois inconnues x, y et z ;

$$(S), \quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + yz + zx = 1 \\ xyz = a \end{cases}$$

- Déterminer les valeurs du paramètre réel a pour que le système ait une solution dans $\mathbb{R}^3$.

* *

*

Fin