



Dérivation des fonctions et ses applications – Série d'exercices 2

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1.

On considère la fonction f définie par :

$$f(0) = -1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{1+2x}}{x} \quad ; \text{ si } x \neq 0.$$

- ① Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
- ② Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- ③ Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.
- ④ f est-elle dérivable en 0 ? Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

○ Exercice 2 (Une inégalité).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 - 4x$$

- ① Dresser le tableau de variation complet de f .
- ② Justifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}), x^4 + 3 \geq 4x$.
- ③ Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = 1$.
 - Montrer que

$$(a_1^2 + 3)(a_2^2 + 3) \dots (a_n^2 + 3) \geq 2^{2n}$$



○ Exercice 3 (Limites et dérivée).

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f'(x) \geq k, \quad \text{Où } k \in \mathbb{R}^+.$$

- ① Montrer que $(\forall x \geq 0), f(x) \geq kx + f(0)$ et $(\forall x \leq 0), f(x) \leq kx + f(0)$
- ② Puis en déduire chacune des deux limites suivantes;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

○ Exercice 4 (Un encadrement et quelques applications).

- ① a) Montrer que $(\forall t \in \mathbb{R}^+), \sin(t) \geq t - \frac{t^3}{6}$

b) En déduire que $(\forall t \in \mathbb{R}^+), \sin(t) \leq t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}$

- ② Calculer en justifiant soigneusement votre réponse chacune des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin(bx) - b \sin(ax)}{x^3} \quad \text{Où } a, b \in \mathbb{R}^* \text{ et } a \neq b.$$

○ Exercice 5 (Étude d'une fonction).

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (x - 1)\sqrt{2 - x}$$

- ① Déterminer D_f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② Étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 2$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- ③ a) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $] -\infty; 2[$ et que

$$(\forall x \in] -\infty; 2[), \quad f'(x) = \frac{-3x + 5}{2\sqrt{2 - x}}.$$

b) Dresser le tableau de variation de f en justifiant la réponse.

- ④ Montrer qu'il existe deux tangentes (T_1) et (T_2) à la courbe (C_f) passant par l'origine du repère (donner l'équation cartésienne de chacune).

○ Exercice 6 (Famille de tangentes).

On considère les fonctions $f_\lambda: x \mapsto \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

- ① Montrer que les tangentes en $a = 0$ des fonctions f_λ sont parallèles.
② Observer que les tangentes en $b = 1$ sont concourantes.

○ Exercice 7.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$$

- Montrer que la tangente (Δ) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = -1$ est aussi tangente à (C_f) en un autre point que l'on déterminera.

○ Exercice 8.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{x}, \quad \text{si } x \neq 0.$$

- ① Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
② La fonction dérivée f' est-elle dérivable en $x_0 = 0$? Justifier la réponse.

○ Exercice 9.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$
et

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 10}{x^2 - 9} = 4$$

- Calculer $f(3)$, puis montrer que f est dérivable en 3 (préciser $f'(3)$).



○ Exercice 10 (Une inégalité).

Soient $n \geq 2$ un entier et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin(kx)$$

On suppose de plus que pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \leq |x|$.

- Démontrer que

$$|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1$$

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Une inégalité trigonométrique).

- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \tan x > x$$

○ Exercice 12 (Une équation fonctionnelle).

- Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ tels que

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}), \quad f(x + y^4) = y^3 \cdot f(y) + f(x)$$

○ Exercice 13 (Une inéquation fonctionnelle).

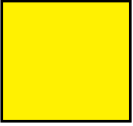
- Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), \quad |f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

○ Exercice 14.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$$



- *Prouver qu'il existe une droite (T) et une seule dont on précisera l'équation tangente à la courbe (C_f) en deux points distincts.*

* *

*

Fin