



Dérivation des fonctions et ses applications – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Détermination d'une tangente 1).

On définit la fonction numérique f par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$$

- ① Montrer que pour tout réel $x \neq 1$, on a

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x - 1}$$

- ② En déduire l'équation de la tangente de f en $x_0 = 0$.

○ Exercice 2 (Détermination d'une tangente 2).

On définit la fonction numérique f par $f(1) = \frac{1}{4}$ et pour tout $x \neq 1$ de l'intervalle $[0, 2]$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

- Déterminer la fonction affine tangente à f en $x_0 = 1$.

○ Exercice 3 (Valeur absolue et dérivabilité).

On définit la fonction numérique f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sqrt{|x| + 1}$$

- ① Étudier la dérivabilité de f en 0.



- ② Montrer que f est dérivable en tout point $a \neq 0$ en déterminant $f'(a)$.

○ Exercice 4.

On définit la fonction numérique f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \max(x^3 + x, x^2 + 2)$$

- Montrer que f est dérivable en $x_0 = 0$.

○ Exercice 5 (Dérivabilité d'une fonction).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant pour tout couple de nombres réels $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$$

- ① Déterminer la valeur de $f(0)$.
- ② Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

○ Exercice 6 (Domaine de dérivabilité).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{E(x)}{x}$$

où E désigne la fonction partie entière.

- Quels sont les points en lesquels la fonction f est dérivable ?

○ Exercice 7 (Dérivabilité à gauche et à droite).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{E(x)}{x}$$

pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ où E désigne la fonction partie entière.

- Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ à gauche et à droite.



○ Exercice 8 (Une inégalité sur la fonction tangente).

Soit x un nombre réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

- Prouver que

$$x + \frac{x^3}{3} \leq \tan(x)$$

○ Exercice 9 (Une inégalité trigonométrique).

Soit x un nombre réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

- Prouver que

$$\cos(x) \times \sqrt{\sin(x)} \geq \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{3}$$

○ Exercice 10 (Limites et nombre dérivé).

- Déterminer la valeur de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{(2 \cos(x))^n - 1}{3x - \pi}$$

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Une limite particulière).

Soit $n \geq 1$ un entier naturel.

- Déterminer la valeur de la limite suivante;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^n - (1-x^2)^n}{x}$$

○ Exercice 12 (Une inégalité sur les polynômes).

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction polynomiale p_n par

$$p_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - k) = (x - 1)(x - 2) \dots (x - n)$$



- Prouver que pour tout couple $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, on a

$$p_n(x)p_n''(x) < (p_n'(x))^2$$

○ Exercice 13 (Une inégalité).

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

- Montrer que

$$\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n < \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

Indication. Étudier la monotonie de la fonction f définie par $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$.

○ Exercice 14 (Maximisation d'une surface).

Soit (C) un cercle dont $[AB]$ est l'un de ses diamètres.

- Déterminer l'ensemble des points M du cercle (C) tels que l'aire du triangle $\triangle ABM$ soit maximal.

* *

*

Fin