



Limite d'une fonction numérique – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Limites et ordre).

Dans chaque cas, calculer la limite correspondante,

①

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x^3}$$

②

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

③

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin(x)}{x^2(2 + \cos(x))}$$

④

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}\right)$$

○ Exercice 2 (Limites et fonction partie entière).

On définit la fonction numérique f sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{2E(x) + (x - E(x))^2}{x^2}$$

pour tout nombre réel x .

① Calculer $\lim_{0^-} f$ et $\lim_{0^+} f$.

② La fonction f admet-elle une limite en 0 ? Justifier votre réponse.

③ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$.

○ Exercice 3 (Limites et opérations).

Calculer les limites suivantes,

① $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 + 3x - 10}$

② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x - 1}{x - 1}$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - 3x)$

⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$

⑥ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

⑦ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3}$

⑧ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x-1}} \right)$

○ Exercice 4 (Lever la forme indéterminée).

Déterminer les valeurs des limites suivantes;

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^3 + x^2}}{|2x + x^2|}$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{|x|}}{x - \sqrt{|x|}}$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$

④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - x - 1 \right)$

○ Exercice 5 (Limites et fonctions trigonométriques 1).

Déterminer les valeurs des limites suivantes;

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(x)} - \sqrt{1 - \sin(x)}}{\tan(x)}$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos(x))}{\sin(3x) - 3\sin(x)}$

○ Exercice 6 (Limites et fonctions trigonométriques 2).

Calculer les limites suivantes;

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{\sqrt{x}}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

○ Exercice 7 (Une limite paramétrée).

Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel a , la valeur de la limite suivante;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - ax$$

○ Exercice 8 (Une famille de fonctions).

Soit m un paramètre réel et on définit la fonction f_m par

$$f_m(x) = \frac{mx^3 + x^2 + m - 1}{x + 1}$$

$\textcircled{1}$ (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f_m .

(b) On suppose que $m = 0$. Que vaut la limite de f_m en $x_0 = -1$?

$\textcircled{2}$ On suppose que m est non nul dans cette question.

(a) Déterminer la limite de f_m en $x_0 = -1$.

(b) Déterminer suivant les valeurs du réel m la valeur de la limite de f_m en $+\infty$.

○ Exercice 9 (Calcul d'une limite).

Soit a un nombre réel strictement positif. Évaluer la limite suivante;

$$\lim_{x \rightarrow a^2} \frac{\sqrt{x} + x - a - a^2}{x\sqrt{x} + x\sqrt{a} - a^2\sqrt{x} - a^2\sqrt{a}}$$

○ Exercice 10.

Déterminer toutes les valeurs du couple (a, b) de nombres réels pour que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} - (ax + b) = 0$$

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Calcul d'une limite par récurrence).

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction f_n par

$$f_n(x) = \frac{(1 - x^2)^n}{(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^n)}$$

① Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \frac{2^n}{n!}$$

pour tout entier $n \geq 2$.

② Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\lim_{x \rightarrow -1} f_n(x) = 0$$

○ Exercice 12 (Une limite particulière).

Déterminer la valeur de la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2026} \left[\frac{x}{x-1} - \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{2026}} \right) \right]$$

○ Exercice 13 (Une fonction définie par morceaux).

On définit la fonction f sur la droite réelle $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

- Montrer que la limite de f en $x_0 = 0$ est nulle.

* *

*

Fin