



Géométrie dans l'espace – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Alignement et coplanarité de points).

Soient $ABCD$ un tétraèdre. On considère les points K, L, M et N tels que $2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AD}$; enfin L est le milieu du segment $[BK]$.

- ① Montrer que les points L, M et N sont alignés.
- ② Montrer que les points A, D, L et M sont coplanaires puis déterminer le couple (α, β) tel que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AL} + \beta\overrightarrow{AM}$$

○ Exercice 2 (Ensemble de points).

Soit $ABCD$ un tétraèdre, M un point mobile sur la droite (AB) et N un point mobile sur la droite (CD) . On note P le point de l'espace défini par la relation $2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NP}$.

- Déterminer l'ensemble des points P lorsque les points M et N varient respectivement sur (AB) et (CD) .

○ Exercice 3 (Un parallélépipède).

Soient $ABCDEFGH$ un parallélépipède. On note I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[FH]$.

- ① Vérifier que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DH}$.
- ② Prouver que (BJ) est parallèle au plan (ACH) .
- ③ Montrer que la droite (DJ) coupe le plan (ACH) au point O milieu du segment

[JD].

○ Exercice 4 (Une étude analytique).

Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par les deux équations cartésiennes,

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{4-z}{-7}$$

- ① Déterminer un point A appartenant à $\mathcal{D}$.
- ② Déterminer un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
- ③ Le point $B(-1, 1, 3)$ appartient-il à la droite $\mathcal{D}$?
- ④ Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par B .
- ⑤ Déterminer l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x - y + 2z + 3 = 0$.

○ Exercice 5 (Intersection de deux plans).

On considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations cartésiennes respectives $\mathcal{P} : x - 2y + z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : 2x + y - z + 3 = 0$.

- Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se coupent suivant une droite $\mathcal{D}$ qu'on déterminera une représentation paramétrique.

○ Exercice 6 (Produit scalaire dans l'espace).

Soit $ABCD$ un tétraèdre.

- ① Montrer que pour tout point M de l'espace, on a

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

- ② Montrer que si les deux droites (AB) et (CD) et les deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires, alors les deux droites (AD) et (BC) le sont aussi.
- ③ Montrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ puis en déduire que

$$AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 - 2\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

- ④ Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si

$$AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$$

- ⑤ On suppose que les arêtes opposées de $ABCD$ sont orthogonales.

- Montrer que le projeté orthogonal H de A sur le plan (BCD) est l'orthocentre du triangle $\triangle BCD$.

○ Exercice 7 (Sphère circonscrite à un tétraèdre).

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient a, b et c trois nombres réels non nuls et soient $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$.

- ① Donner l'équation de la sphère S passant par O, A, B et C .
- ② Donner l'équation du plan passant par A, B et C .
- ③ En déduire le rayon de la sphère C passant par A, B et C .

○ Exercice 8 (Division vectorielle).

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et soit $a \in \mathbb{R}$.
On considère l'équation vectorielle d'inconnue $\vec{x}$,

$$\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{w}$$

- ① Montrer que si l'équation admet une solution, alors les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
On supposera dans la suite que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- ② Déterminer toutes les solutions colinéaires à $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
- ③ En déduire toutes les solutions de l'équation.
- ④ Déterminer les vecteurs qui vérifient en outre

$$\vec{x} \cdot \vec{w} = a$$

Exercices supplémentaires

○ Exercice 9 (Géométrie ensembles de points).

Soient A et B deux points distincts de l'espace $\mathcal{E}$. On considère l'application f définie de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(M) = 3MA^2 - 2MB^2$$

- Montrer qu'il existe un unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que pour tout point $M \in \mathcal{E}$, on ait

$$f(M) = MG^2 - 6AB^2$$

- Soient $A(1, -2, 1)$ et $B(-2, 0, 1)$. Déterminer les points $M \in \mathcal{E}$ tels que $f(M) = 12$.

○ Exercice 10 (Une identité géométrique).

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle et H le projeté orthogonal du point B sur le plan (ACF) .

- Prouver l'identité suivante,

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AE^2}$$

* *

*

Fin