



Analytique du produit scalaire dans le plan – Série d'exercices 2

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Sur la bissectrice).

Soient $\triangle ABC$ un triangle et on note $AC = b$ et $c = AB$. Soit (Δ) l'ensemble des points M tels que

$$\frac{1}{c} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{b} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$$

- ① (a) Soit I un point de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
Montrer que $I \in (\Delta)$.

(b) Montrer que $(AI) \subset (\Delta)$.

- ② En déduire que l'ensemble (Δ) est la droite (AI) et que

$$\overrightarrow{AI} \cdot \left(\frac{1}{c} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{b} \overrightarrow{AC} \right) = \vec{0}$$

○ Exercice 2 (Ensemble de points).

Soit $\triangle ABC$ un triangle. On considère l'ensemble (Δ) de points M vérifiant

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MA^2$$

- ① Soient I le milieu du segment $[BC]$ et M un point du plan.
Montrer que

$$M \in (\Delta) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

- ② Déterminer le point J d'intersection de (AI) et (Δ) .



- ③ En déduire la nature de l'ensemble (Δ) .

○ Exercice 3 (Une identité géométrique).

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On considère l'ensemble (Δ) de points M tels que

$$MD^2 - MB^2 = CD^2 - CB^2$$

- ① Déterminer explicitement l'ensemble (Δ) .
② En déduire que les deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires si et seulement si

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$$

Exercices supplémentaires

○ Exercice 4 (Ensemble de points).

On considère un rectangle $ABCD$.

- Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$$

Indication. Exprimer le point D comme barycentre des points A , B et C .

○ Exercice 5.

Dans le plan, soit D une droite, Γ et Γ' deux cercles, r le rayon de Γ , r' le rayon de Γ' . Supposons que Γ et Γ' se situent dans le même côté d'une droite D , que Γ et Γ' sont tangents à la droite D respectivement en M et M' et que Γ et Γ' sont tangents entre eux.

- Exprimer la distance MM' en fonction de r et r' .



○ Exercice 6 (Une identité géométrique).

Soient $\triangle ABC$ un triangle rectangle en C et M un point de l'intérieur du triangle $\triangle ABC$. On note X, Y et Z les projections orthogonales du point M sur les cotés $[BC], [AC]$ et $[AB]$ dans cet ordre.

- Montrer que

$$AY \cdot AC + BZ \cdot BA + CX \cdot CB = AB^2$$

* *

*

Fin