



Analytique du produit scalaire dans le plan – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Calcul analytique).

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. On considère les points $A(1, -1)$, $B(4, -1)$ et $C(-2, 2)$.

- ① Calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et le déterminant $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$.
- ② Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\vec{AB}, \vec{AC})$.
- ③ Déterminer l'aire du triangle $\triangle ABC$.
- ④ Déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle $\triangle ABC$ issue du sommet A .
- ⑤ Déterminer une équation cartésienne de la bissectrice de l'angle $(\vec{AB}, \vec{AC})$.

○ Exercice 2 (Régionnement du plan).

On munit le plan $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit (C) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que

$$\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$$

- ① Montrer que (C) est un cercle en déterminant son centre, son rayon et une équation cartésienne.
- ② Soit A le point de coordonnées $(-1, 0)$. Montrer que le point A se situe en dehors du disque de frontière (C) et déterminer les tangentes du cercle (C) issues du point A .

- ③ (a) Soit (Δ) la droite d'équation réduite $y = x$. Montrer que la droite (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer.
- (b) Déterminer l'ensemble (Γ) de points $M(x, y)$ de $\mathcal{P}$ vérifiant

$$\frac{x^2 + y^2}{4} \leq x \leq y$$

○ Exercice 3 (Une famille de cercles).

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 Pour un nombre réel m , on note (C_m) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan $\mathcal{P}$ qui vérifient

$$x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0$$

- ① Déterminer explicitement l'ensemble (C_1) .
- ② (a) Montrer que pour tout réel $m \neq 1$, l'ensemble (C_m) est un cercle de centre Ω_m et de rayon R_m .
- (b) Déterminer l'ensemble des points Ω_m quand m varie dans l'ensemble $\mathbb{R} - \{1\}$.
- (c) Montrer que tous les cercles (C_m) passent par un point invariant (ne dépendant pas de m) et construire (C_0) , (C_2) et (C_3) .
- ③ (a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $x = 1$ est tangente à tous les cercles (C_m) .
- (b) Soit $m \neq 1$ un réel supérieur strictement à $-\frac{3}{2}$ et on considère le point $A(0, 1)$.
 Montrer que le point A se situe en dehors du cercle (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux cercles (C_m) .

○ Exercice 4 (Un C.N.S d'orthogonalité).

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\vec{j}$ avec α un nombre réel.

- Déterminer les valeurs éventuels de $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.



○ Exercice 5 (Angle entre deux droites).

Soient (Δ_1) et (Δ_2) les deux droites d'équations cartésiennes respectives $2x + y - 3 = 0$ et $x - y - 1 = 0$ dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer les mesures des angles formés par les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) .

○ Exercice 6 (Cercle défini par un de ses diamètres).

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère les points $A(2, 2)$ et $B(-2, 6)$.

- Écrire l'équation cartésienne du cercle dont un de ses diamètres est $[AB]$.

○ Exercice 7 (Ensembles de points).

On munit le plan d'un repère orthonormé. Soient $A(2, 1)$ et $B(-1, 2)$.

- ① Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points du plan vérifiant

$$MA = 2MB$$

- ② Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$AM^2 - BM^2 = 6$$

○ Exercice 8 (Une inéquation à deux inconnues).

Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan (muni d'un repère orthonormé) tels que

$$x^2 + y^2 - 6x > 0$$

○ Exercice 9 (Cercle passant par trois points).

On munit le plan d'un repère orthonormé.

- Déterminer les éléments caractéristiques du cercle passant par les trois points $A(1, -4)$, $B(-1, 2)$ et $C(-5, 0)$.



○ Exercice 10 (Ensemble de points).

Soient $\triangle ABC$ un triangle équilatéral.

- Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MA^2$$

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Lieu géométrique).

On considère un cercle (C) et le segment $[AB]$ son diamètre.

Soient M un point du cercle (C) différent de A et B et G le barycentre du triangle $\triangle MAB$.

- Montrer que lorsque M varie sur le cercle (C) , le point G varie sur un ensemble (Γ) à déterminer.

○ Exercice 12.

On considère un cercle (C) de centre O de rayon r et A un point tel que $OA = l$ et $0 < l < r$.

- Construire la corde passant par A de longueur minimale et déterminer la longueur de cette corde.

* *

*

Fin