



Calcul trigonométrique – Série d'exercices 2

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Quelques valeurs trigonométriques).

① Montrer que

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$$

② En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

○ Exercice 2 (Une équation algébrique d'ordre 3).

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$4X^3 - 3X - \sqrt{2} = 0$$

d'inconnue $X \in \mathbb{R}$.

Indication. Poser $X = \cos(\theta)$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

○ Exercice 3 (Dans le triangle).

Soient $n \in \mathbb{N}$, α, β et γ des nombres réels vérifiant

$$\alpha + \beta + \gamma = n\pi$$

• Montrer que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1 = 2(-1)^n \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma)$$



○ Exercice 4.

Soient α et β deux nombres réels de l'intervalle $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ tels que

$$\sin(\beta) = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad \text{et} \quad \tan(\alpha) = \frac{1}{7}$$

Montrer que

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$$

○ Exercice 5 (Une identité trigonométrique).

Soient a, b et c trois nombres réels.

Montrer que

$$\cos(a) + \cos(b) + \cos(c) + \cos(a+b+c) = 3 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+c}{2}\right) \cos\left(\frac{b+c}{2}\right)$$

○ Exercice 6 (Une équation trigonométrique 1).

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante,

$$(E), \quad |\cos(x)| = \cos(x) - 2 \sin(x)$$

○ Exercice 7 (Une équation trigonométrique 2).

Déterminer tous les nombres réels x pour lesquels on a

$$\cos(\sin(x)) = \sin(\cos(x))$$

○ Exercice 8 (Une inégalité trigonométrique 1).

Soient α, β et γ trois nombres réels dont leur somme vaut π .

• Montrer que

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \geq \frac{3}{4}$$



○ Exercice 9 (Un système trigonométrique).

Soient x, y et z trois nombres réels positifs vérifiant $x + y + z = \pi$.

- Prouver que

$$(1 - \cos x)(1 - \cos y)(1 - \cos z) \leq \frac{1}{8}$$

○ Exercice 10 (Une inégalité sur les tangentes).

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

- Montrer que pour tout x de l'intervalle $\left] 0, \frac{\pi}{4(n-1)} \right]$, on a

$$\tan(nx) > n \tan(x)$$

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Une inégalité trigonométrique 1).

Soient x, y et z trois nombres réels vérifiant

$$\sin x + \sin y + \sin z \geq 2$$

- Montrer que

$$\cos x + \cos y + \cos z \leq \sqrt{5}$$

○ Exercice 12 (Une inégalité trigonométrique 2).

Soient x, y et z trois nombres réels vérifiant

$$\sin x + \sin y + \sin z \geq \frac{3}{2}$$

- Montrer que

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(y - \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(z - \frac{\pi}{6} \right) \geq 0$$



○ Exercice 13 (Une inégalité trigonométrique 3).

Soient $\triangle ABC$ un triangle et R le rayon de son cercle circonscrit.

- Montrer que

$$8R^2 + R^2 \cos(\widehat{B} - \widehat{C}) \geq a^2 + b^2 + c^2$$

○ Exercice 14 (Une identité trigonométrique).

On considère un triangle $\triangle ABC$ de cotés respectifs $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

- Montrer que

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cos(\widehat{C}) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \cos(\widehat{A}) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \cos(\widehat{B}) = 3$$

* *

*

Fin