



Calcul trigonométrique – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Une inéquation trigonométrique).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$A(x) = \cos(3x) - 3 \sin(x) + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

- ① Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de x et $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
- ② En déduire une simplification de $A(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- ③ Résoudre dans le domaine $[-\pi, \pi]$ l'équation

$$A(x) = \frac{1}{2}$$

- ④ Résoudre dans le domaine I l'inéquation

$$A(x) \leq \frac{1}{2}$$

○ Exercice 2 (Un produit trigonométrique).

Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{9}\right) \sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{3}{16}$$



○ Exercice 3 (Une équation trigonométrique 1).

Résoudre dans $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ l'équation (T) d'inconnue θ où

$$(T), \quad 3 \sin(\theta) + 5 \cos(\theta) = 5$$

○ Exercice 4 (Une équation trigonométrique 2).

Résoudre l'équation (E) d'inconnue $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$,

$$(E), \quad \sin(x) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

○ Exercice 5 (Une identité trigonométrique).

① Montrer que pour tout $a \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$, on a

$$\tan^2\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{1 - \cos(a)}{\sin(a)}\right)^2$$

② Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

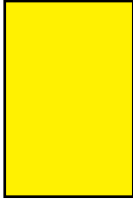
○ Exercice 6 (Une équation trigonométrique 3).

Résoudre dans le domaine $]-\pi, \pi[$ l'équation

$$(E), \quad \sin^4(x) + \cos^4(x) = \frac{1}{2}$$

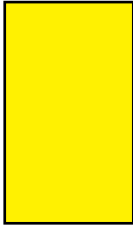
○ Exercice 7 (Une identité dans le triangle 1).

Soient α, β et γ les mesures des angles d'un triangle.

- 
- Montrer que

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\gamma}{2} \right)$$

○ Exercice 8 (Une identité dans le triangle 2).

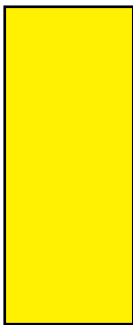


Soient α, β et γ les mesures des angles d'un triangle.

- Montrer que

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan(\alpha) \tan(\beta) \tan(\gamma)$$

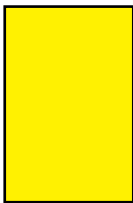
○ Exercice 9 (Un système trigonométrique).



Résoudre dans $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ le système suivant,

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \tan(x) + \tan(y) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

○ Exercice 10 (Un produit télescopique).

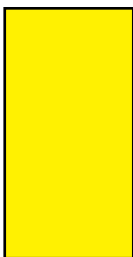


Simplifier le produit

$$P = \cos \left(\frac{\pi}{7} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) \cos \left(\frac{4\pi}{7} \right)$$

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Une inégalité trigonométrique 1).



Montrer que pour tout $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, on a

$$\frac{1}{\tan \left(\frac{\theta}{2} \right)} \geq 1 + \frac{1}{\tan(\theta)}$$



○ Exercice 12 (Quelques inégalités trigonométriques).

Soient α, β et γ trois nombres réels positifs vérifiant

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Prouver que

①

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{1}{8}$$

②

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

③

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) \leq \frac{3}{2}$$

④

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \geq 1$$

○ Exercice 13 (Un encadrement).

Pour tout réel x , on pose

$$H(x) = 2 \sin^2(x) + 4 \cos^2(x) + \sin(x) \cos(x)$$

• Montrer que

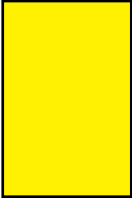
$$3 - \sqrt{10} \leq H(x) \leq 3 + \sqrt{10}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

○ Exercice 14.

On considère un triangle $\triangle ABC$ de cotés respectifs a, b et c et de mesures d'angles α, β et γ dans cet ordre (où l'angle α est opposé au côté a). On suppose de plus que

$$\sqrt{(b+c)(b-c)} = a\sqrt{2}$$



- *Montrer que*

$$\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin(\alpha) \sin(\beta) + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1$$

* *

*

Fin