



Suites numériques – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Une suite périodique).

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et par la relation de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 5}{u_n - 1}$$

- ① Montrer que la suite (u_n) est périodique de période 2.
- ② Déterminer la valeur de u_{2025} et u_{2026} .

○ Exercice 2 (Une suite arithmétique).

On définit la suite (u_n) par la relation

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 4n^2 - 3n$$

- Montrer que la suite (u_n) est arithmétique en déterminant sa raison et son terme initial.

○ Exercice 3 (Monotonie d'une suite).

Soit $a \in]-1, +\infty[$ un nombre réel. On définit la suite (u_n) par son terme initial $u_0 = a$ et par la relation de récurrence suivante,

$$u_{n+1} = u_n^3 + 2u_n + 2$$

- Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.



○ Exercice 4 (Utilisation des suites).

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n \geq (n-1)!$$

○ Exercice 5 (Suites et partie entière).

Soit $a > 1$ un nombre réel. On définit la suite (x_n) par $x_0 = a$ et la relation de récurrence,

$$x_{n+1} = x_n + [x_n]$$

- Expliciter x_n en fonction de n .

Remarque. La notation $[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x .

○ Exercice 6 (Une suite récurrente).

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a \in]-1, 0[$ et la relation de récurrence;

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}}$$

- ① Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$-1 < u_n < 0$$

- ② Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

- ③ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n \geq \frac{a}{(\sqrt{a+2})^n}$$

○ Exercice 7 (Étude d'un couple de suites).

On définit les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 3, v_0 = 5$ et par les relations de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$$

- ① Montrer que $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq 0$.



② Étudier les monotonies des suites (u_n) et (v_n) .

○ Exercice 8 (Sur la suite harmonique).

Soit $(H_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

- Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$H_1 + H_2 + \dots + H_n + n = (n+1)H_n$$

○ Exercice 9.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)^2} + \dots + \frac{x^7}{(x+1)^7} = 0$$

○ Exercice 10 (Sur la progression géométrique).

Soient a, b et c trois nombres réels en progression géométrique vérifiant $a + b + c = 36.75$ et $abc = 343$.

- Déterminer les valeurs de a, b et c .

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Recherche d'une suite numérique).

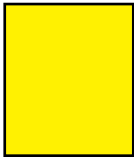
On considère la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_0 = 1, x_1 = 2$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6\sqrt{x_{n-1}}}$$

- Expliciter le terme général u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

○ Exercice 12 (Une inégalité).

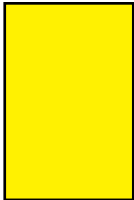
Soit $n \geq 3$ un entier naturel.



- Montrer que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

○ Exercice 13 (Un encadrement).

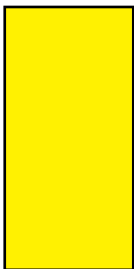


Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

Prouver que

$$1 + \frac{n}{2} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n} \leq 1 + n$$

○ Exercice 14.

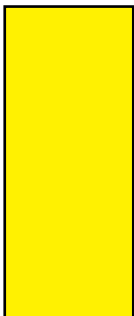


On définit la suite numérique $(a_n)_{n \geq 1}$ par $a_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$$

- La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est bornée ? Justifier votre réponse.

○ Exercice 15.

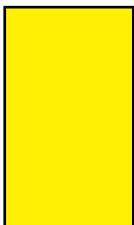


Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite arithmétique à termes strictement positifs de raison $r = 1$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} + \dots + \frac{1}{a_{2n}}$$

- Montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est à la fois monotone et bornée.

○ Exercice 16 (Une sommation).



Donner une forme close de la somme suivante,

$$\sum_{i=0}^{2026} \frac{2^i}{1 + 2^{2^i}}$$

* *

*

Fin