



Généralités sur les fonctions numériques – Série d'exercices 2

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Maximum d'une fonction).

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{|x|}{x^2 + 2}$$

- Montrer que $\sqrt{2}/4$ est la valeur maximale de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

○ Exercice 2 (Tableau de variations).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + |x| + 1}$$

- Donner le tableau de variations de la fonction f .

○ Exercice 3 (Détermination de bornes).

On définit la fonction q sur $[0, 1]$ par

$$q(x) = x^3 - 3x + 1$$

- ① Montrer que q est décroissante sur $[0, 1]$.
- ② En déduire que q y est bornée et en déterminer une borne inférieure et une borne supérieure.



○ Exercice 4 (Utilisation de fonctions).

Montrer à l'aide d'une étude de fonction que pour tout nombre réel $a > 1$, on a

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}} < \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

○ Exercice 5 (Sur les parties entières).

Soient x et y deux réels n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$ telle que leur somme $x + y$ appartient à $\mathbb{Z}$.

- Montrer que

$$[x] + [y] = x + y - 1$$

où $[t]$ désigne la partie entière du nombre réel t .

○ Exercice 6.

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

- Déterminer la forme explicite de f sachant que $g(x) = 2x - 7$ et

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 2x + 1$$

pour tout nombre réel x .

○ Exercice 7 (Sur la monotonie).

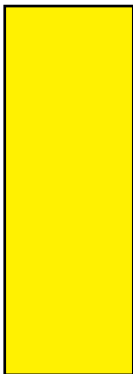
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle vérifiant les deux conditions,

1. La fonction $f \circ f$ est croissante;
 2. La fonction $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.
- Prouver que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

○ Exercice 8 (Une équation fonctionnelle).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

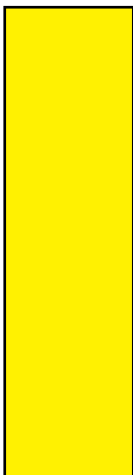
$$f(xf(x) + f(y)) = [f(x)]^2 + y$$



pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- ① Montrer que la fonction f est injective.
- ② Montrer que la fonction f est surjective.
- ③ Justifier pourquoi $f(0) = 0$.
- ④ En déduire que $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

○ Exercice 9 (Une somme télescopique).



Soit a un nombre réel.

- ① Montrer que

$$[a] + \left[a + \frac{1}{2} \right] = [2a]$$

- ② En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=0}^{2026} \left[\frac{a + 2^k}{2^{k+1}} \right]$$

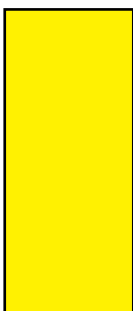
○ Exercice 10 (Un problème d'optimisation).



Parmi tous les losanges de même périmètre p , quel est celui qui a la plus grande surface ?

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Équation fonctionnelle et géométrie).



Soit f une fonction réelle définie sur le plan et vérifiant

$$f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$$

pour tout carré $ABCD$.

- Prouver que la fonction f est identiquement nulle.



○ Exercice 12 (Une équation fonctionnelle).

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant

$$6f(n+3) - 3f(n+2) - 2f(n+1) - f(n) = 0$$

pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$.

○ Exercice 13.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui vérifie

$$f(f(x)) = x^3 + \frac{3}{4}x$$

- Montrer qu'il existe trois nombres réels distincts a, b et c tels que

$$f(a) + f(b) + f(c) = 0$$

○ Exercice 14.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que $f(1) = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$f(n+1) = \left[f(n) + \sqrt{f(n)} + \frac{1}{2} \right]$$

où $[t]$ désigne la partie entière du nombre réel t .

○ Exercice 15 (Un point fixe).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$(f \circ f)(x) = \frac{x^9}{(x^2 + 1)(x^6 + x^4 + 2x^2 + 1)}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que la fonction f possède un unique point fixe.

* *

*

Fin