



# Généralités sur les fonctions numériques – Série d'exercices 1

---

## Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

*Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.*

### ○ Exercice 1 (Une fonction bornée).

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

- ① Montrer que la fonction  $f$  est minorée.
- ② Montrer que la fonction  $f$  est majorée par  $1/2$ .

### ○ Exercice 2 (Extrema d'une fonction 1).

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$f(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x - 4$$

- ① Montrer que la fonction  $f$  admet une valeur minimale.
- ② Prouver que la fonction  $f$  est non majorée.

### ○ Exercice 3 (Extrema d'une fonction 2).

On définit la fonction  $f$  sur  $[2, 8]$  par

$$f(x) = |x - 2| + |x - 4| + |2x - 6|$$

- Que vaut la somme des valeurs minimale et maximale de la fonction  $f$  ?



### ○ Exercice 4 (Ensemble de définition).

On définit la fonction  $f$  de variable  $x$  par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - E(x)}$$

- Que vaut l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de la fonction  $f$  ?

### ○ Exercice 5 (Une équation fonctionnelle).

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par la relation

$$x + |f(x)| = 2f(x)$$

- ① Déterminer la valeur de  $f(0)$ .
- ② Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $xf(x) \geq 0$ .
- ③ En déduire une expression explicite de la fonction  $f$ .
- ④ Tracer le graphe de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé.

### ○ Exercice 6 (Tableau de variation 1).

On considère la fonction numérique  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

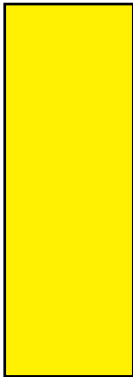
- ① Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de la fonction  $f$ .
- ② Montrer que la fonction  $f$  est croissante sur la fonction  $[1, +\infty[$ .
- ③ Donner le tableau de variations de la fonction  $f$ .

### ○ Exercice 7 (Fonctions et parties entières).

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = x + (E(x))^2 + 1$$

- ① Tracer le graphe de la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $[-2, 2[$ .
- ② (a) Montrer que la restriction de  $f$  sur  $\mathbb{N}$  est croissante.  
(b) Soit  $n \in \mathbb{Z}$  un entier relatif. Étudier la monotonie de  $f$  sur l'intervalle


$$[n, n + 1[.$$

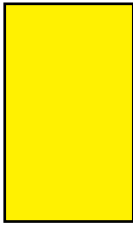
(c) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a

$$f(x) < f(E(x) + 1)$$

(d) En déduire que  $f$  est strictement monotone sur  $\mathbb{R}^+$ .

③ Déterminer la valeur minimale de fonction  $f$ .

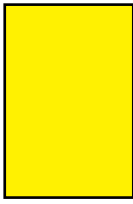
### ○ Exercice 8 (Monotonie d'une composée).



En utilisant la monotonie d'une composée, déterminer la monotonie de la fonction  $h$  définie par  $\mathbb{R}^+$  par

$$h(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

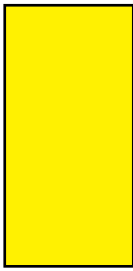
### ○ Exercice 9.



Soit  $f$  une fonction polynômiale de second degré. On suppose que l'équation  $f(x) = x$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .

- Montrer que l'équation  $f(f(x)) = x$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$ .

### ○ Exercice 10 (Tableau de variations 2).



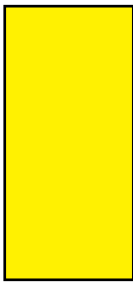
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{|x|}{x^3 + x}$$

puis dresser son tableau de variations.

### Exercices supplémentaires

### ○ Exercice 11 (Partie entière d'un nombre réel).



Soit  $n \geq 1$  un entier naturel; et  $R$  le nombre réel défini par

$$R = \sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2 + 1}}}}$$

- Déterminer la valeur de  $[R]$ , partie entière de  $R$ .



### ○ Exercice 12 (Une identité sur les parties entières).

Soient  $a$  un nombre réel et  $n \geq 1$  un entier naturel.

- Montrer que

$$\left[ \frac{[na]}{n} \right] = [a]$$

Remarque. On désigne par  $[t]$  la partie entière du nombre réel  $t$ .

### ○ Exercice 13.

Soient  $a, b$  et  $c$  trois nombres réels et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

On suppose que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x) \neq 2x$ .

- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$(f \circ f)(x) \neq 4x$$

### ○ Exercice 14 (Fonctions sous-additives).

On note  $I$  l'intervalle  $I = ]0, +\infty[$  et on considère deux fonctions  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $g$  décroissante sur  $I$  et  $f(x) = xg(x)$  pour tout  $x \in I$ .

- Montrer que

$$(\forall (x, y) \in I^2), \quad f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$



### ○ Exercice 15 (Une fonction périodique).

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique vérifiant

$$f(x+2) = f(x-1)f(x+5)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

- Montrer que la fonction  $f$  est périodique.

\* \*

\*

*Fin*