



Barycentre dans le plan – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Barycentre et concours de droites).

Soient $\triangle ABC$ un triangle et I, J et K trois points appartenant respectivement aux segments $[BC], [AC]$ et $[AB]$ tels que $BI = BC/3, CJ = \frac{3}{4}AC$ et $AK = \frac{2}{5}AB$.

- Montrer que les droites $(AI), (BJ)$ et (CK) sont concourantes.

○ Exercice 2 (Une identité vectorielle).

Soient $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ deux triangles dans le plan. On suppose de plus que ces deux triangles ont le même barycentre.

- Prouver que

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

○ Exercice 3 (Barycentre et parallélisme).

Soient $\triangle ABC$ un triangle et A' le milieu du segment $[BC]$. On note B' le barycentre du système pondéré $\{(A, -2); (C, 1)\}$ et C' le barycentre des points $\{(A, -2); (B, 1)\}$.

- Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles.

○ Exercice 4 (Construction d'un barycentre).

On considère un carré $ABCD$ et soit H le barycentre du système pondéré $\{(A, 2); (B, 3); (C, -6); (D, 4)\}$.

- ① Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AH}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- ② Construire le point H .
- ③ Soit $EFGH$ un parallélogramme.
Construire le point K , barycentre du système pondéré

$$\{(E, -2); (F, 3); (G, 1); (H, -4)\}$$

○ Exercice 5 (Ensemble de points).

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.

- Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient l'égalité

$$\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}\|$$

○ Exercice 6.

Soient $\alpha > \beta > 0$ deux nombres réels et G le barycentre des points pondérés $(A, \alpha), (B, -\alpha)$ et (C, β) .

- ① Que peut-on dire à propos des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}$.
- ② Construire le point G dans le cas $(\alpha, \beta) = (2, 1)$.

○ Exercice 7 (Un point invariant du plan).

Soit A et B deux points différents du plan. On associe à chaque point M du plan, un point M' vérifiant

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$$

- Montrer que le point (MM') passe par un point invariant G lorsque M se déplace dans le plan.

○ Exercice 8.

On considère un carré $ABCD$.

- Comment on doit choisir le triplet de nombres réels (x, y, z) de sorte que D soit le barycentre des points pondérés $(A, x), (B, y)$ et (C, z) ?



○ Exercice 9.

Soient α un nombre réel strictement positif et G le barycentre des points pondérés (A, α) , $(B, -\alpha)$ et (C, α) .

- Construire le point G . Quelle est la nature du quadrilatère $ABCG$? Justifier votre réponse.

○ Exercice 10 (Ensemble de points).

On considère un triangle ΔABC .

- ① Construire le point G barycentre du système $\{(A, 3), (B, 5)\}$.
- ② Déterminer l'ensemble des points M tels que le vecteur $3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Barycentre et aires).

Soit ΔABC un triangle et $a, b, c > 0$ trois nombres réels. On désigne par H le barycentre du système pondéré $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$. Soient α, β, γ et s les aires respectifs des triangles ΔHBC , ΔHCA , ΔHAB et ΔABC .

- Montrer que α, β, γ et s sont proportionnelles dans cet ordre avec a, b, c et $a + b + c$.

○ Exercice 12 (Droite d'Euler).

Soit ΔABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, G son centre de gravité et H son orthocentre.

- Montrer que les points O, G et H se situent sur la même droite.

Indication. Commencer par montrer que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

* *

*

Fin