



Applications – Série d'exercices 3

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Point fixe d'une application).

Soit $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ une application où $n \geq 1$ un entier naturel. On suppose de plus que l'application f est croissante.

- Montrer que f admet au moins un point fixe; c'est-à-dire il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $f(k) = k$.

○ Exercice 2.

On considère l'application $f : [1, +\infty[\rightarrow [\sqrt{2}, +\infty[$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$$

- Montrer que f est une application bijective. Expliciter f^{-1} .

○ Exercice 3 (Une équation de troisième degré).

Déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$x^3 + x = 2$$

Indication. Construire une application puis montrer qu'elle est injective.

○ Exercice 4.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - |x|$$

- Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble E à déterminer.



○ Exercice 5 (Une application à deux variables).

On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

- Expliciter l'ensemble $f(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)$.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 6 (Une équation fonctionnelle).

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$(f \circ f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f \circ f)(x) + 2x$$

○ Exercice 7.

Soit f une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq 0$, $f(n) \leq n$.

- Montrer que $f = \text{id}_{\mathbb{N}}$. Même question en supposant que f est une surjection vérifiant $f(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

○ Exercice 8 (Une caractérisation des bijections).

Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application.

- Montrer que f est une application bijective si et seulement si pour toute partie A de E , on a

$$f(C_E^A) = C_F^{f(A)}$$

Remarque. Pour deux parties $X \subset Y$, la partie C_Y^X désigne la partie complémentaire de X dans Y .

* *

*

Fin