



Applications – Série d'exercices 2

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Étude d'une application).

On considère l'application

$$f : \left[\frac{1}{4}, +\infty \right[\rightarrow \left[\frac{1}{4}, +\infty \right[, \quad x \mapsto x - \sqrt{x}$$

- ① Montrer que l'application f est bien définie.
- ② Montrer que l'application f est injective.
- ③ Montrer que f est surjective.
- ④ Expliciter l'inverse f^{-1} de f .
- ⑤ Résoudre l'équation

$$f^{-1}(x) = f(x)$$

dans $[1/4, +\infty[$.

○ Exercice 2.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- Montrer que f est une application bijective et déterminer sa réciproque f^{-1} .



○ Exercice 3 (Une équation fonctionnelle).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \neq 0, 1$ la relation suivante,

$$f\left(1 - \frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$$

○ Exercice 4.

On considère l'application $f : \mathbb{Z} \times [1, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(n, x) = n + x - 1$$

Montrer que f est une bijection et expliciter f^{-1} .

○ Exercice 5 (Applications et géométrie).

Soient $\mathcal{D}$ une droite du plan $\mathcal{P}$ et $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$. On considère la translation $\mathcal{T}$ de vecteur $\vec{u}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}$ la symétrie d'axe $\mathcal{D}$.

- ① Montrer que $\mathcal{S}_{\mathcal{D}} \circ \mathcal{T}$ est une bijection du plan $\mathcal{P}$ vers lui même.
- ② Expliciter l'application réciproque de l'application ainsi définie (moyennant les paramètres donnés auparavant).

○ Exercice 6 (Une équation fonctionnelle).

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(xf(y)) = f(xy) + x$$

○ Exercice 7 ($\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents).

Trouver une application bijective entre l'ensemble $\mathbb{N}$ et l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Indication. Partez d'un entier naturel n et pensez au plus grand entier $p \geq 0$ tel que 2^p divise n .



○ Exercice 8.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = t^3 + t + 1$$

- Montrer que l'application f est injective.

○ Exercice 9.

On considère deux applications $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que f injective, g surjective et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) \leq g(n)$.

- Montrer que $f = g$.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 10 (Sur les applications contractantes).

Soient $a < b$ deux nombres réels et $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications telles que pour tout $x \in [a, b]$, on a $g(x) = x + f(x)$ et

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} \times |x - y|$$

- Montrer que l'application g est injective.

○ Exercice 11 (Application de Cantor).

Montrer que l'application

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (x, y) \mapsto \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + y$$

est injective.

○ Exercice 12 (Sur les nombres harmoniques).

Montrer que l'application

$$\psi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*, \quad n \mapsto E\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

est surjective mais pas injective.



Remarque. On désigne par $E(x)$ la partie entière du réel x , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x . Par exemple $E(3,7) = 3$.

* *

*

Fin