



Applications – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1.

On considère l'application

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -2x + 3$$

- ① Soit $r > 0$ un nombre réel.

Déterminer $A = f^{-1}(]1 - r, 1 + r[)$ et $B = f\left(\left[0, \frac{3}{2}\right]\right)$.

- ② (a) Déterminer suivant les valeurs du paramètre r les ensembles suivants,

$$A \cap B, \quad A \cup B \quad \text{et} \quad A \Delta B$$

(b) Déterminer toutes les valeurs de r pour lesquelles $A \cup B$ est un intervalle.

○ Exercice 2 (Ensembles et applications).

Soient E un ensemble non vide et $A, B \subset E$ deux parties de E . On considère l'application $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par

$$f(X) = (A \cap X, B \cap X)$$

- ① (a) Montrer que l'application f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
(b) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
- ② (a) Sous quelles conditions l'application f est-elle bijective ?
(b) Expliciter f^{-1} dans ce cas.



○ Exercice 3 (Une application de $\mathbb{R}^2$ vers lui même).

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x + y, 3x + 2y)$$

- ① (a) Montrer que l'application f bijective.
(b) Donner sa bijection réciproque f^{-1} .
- ② On considère l'application $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (|x| + y, 3|x| + 2y)$$

- (a) Montrer que g n'est pas injective.
- (b) Justifier pourquoi f n'est pas surjective.

○ Exercice 4 (Détermination de la bijection réciproque).

On considère l'application $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$$

- ① Montrer que l'application f est bien définie.
- ② Prouver que f est bijective et expliciter f^{-1} .

○ Exercice 5.

Considérons l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par

$$f(x, y) = x + \frac{1}{y}$$

- ① (a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ l'équation

$$f(x, y) = \frac{2}{3}$$

- (b) L'application f est-elle surjective .
- ② Montrer que l'application f est injective.



○ Exercice 6.

On considère l'application $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(n) = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$$

- ① Montrer que l'application f est injective.
- ② Montrer que f n'est pas surjective.

○ Exercice 7.

On considère l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$f(x, y) = 4x + 7y$$

- ① Montrer que l'application f n'est pas injective.
- ② Montrer que f est surjective.

Indication. Pour montrer que f est surjective, vous pouvez vous aider en calculant la valeur de $f(9, -5)$.

○ Exercice 8.

On considère l'application $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = t^4 - 4t + 1$$

- Montrer que l'application f est injective.

○ Exercice 9 (Applications idempotentes).

Soit E un ensemble non vide et $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant

$$f \circ f = f$$

- Montrer que si f est injective ou surjective, alors f est l'application identité.



○ Exercice 10 (Une équation fonctionnelle).

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercices supplémentaires

○ Exercice 11.

Soit E un ensemble non vide et $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant

$$f \circ f \circ f = f$$

- Montrer que l'application f est injective si et seulement si elle est surjective.

○ Exercice 12 (Une application alternée).

On définit l'application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par

$$\varphi(n) = n + (-1)^n$$

- Montrer que φ est une bijection et expliciter φ^{-1} .

○ Exercice 13.

Déterminer toutes les applications f définies sur l'ensemble $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ qui vérifient pour tout $x \in D$, l'égalité

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{x+3}{1-x}\right) = x$$

* *

*

Fin