



Ensembles – Série d'exercices 2

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Une équation paramétré).

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de solutions de l'équation

$$(\mathcal{S}), \quad x^5 - 5x^3 + 10x + m = 0$$

où m un paramètre réel.

- ① Montrer que si $m < 0$, alors $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_*^+$.
- ② Montrer que si $m > 0$, alors $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}_*^-$.

○ Exercice 2.

Soient X, Y deux parties d'un ensemble E tels que

$$X \cup Y = X \cap Y$$

- Montrer que $X = Y$.

○ Exercice 3 (Une équation diophantienne).

Déterminer en extension l'ensemble suivant

$$\mathcal{N} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \right\}$$



○ Exercice 4.

On définit l'ensemble E par

$$E = \left\{ \frac{x}{y} + \frac{9y}{x}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \right\}$$

- ① Montrer l'inclusion $E \subset [6, +\infty[$.
- ② L'inclusion inverse est-elle vraie ? Justifier.

○ Exercice 5 (Une construction graphique).

On munit le plan d'un repère orthonormé.

- Expliciter la partie du plan Γ définie par

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq 0 \implies x > y\}$$

puis représenter Γ graphiquement.

○ Exercice 6 (Identification d'un ensemble).

Soit E la partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$E = \left\{ \frac{4 - \sqrt{x}}{4 + \sqrt{x}}, \quad x \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

- Prouver que $E =]-1, 1]$.

○ Exercice 7.

On considère l'ensemble E défini par

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 - x - y \leq \frac{1}{4} \right\}$$

- ① Montrer que $E \neq \emptyset$.
On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$.
- ② Montrer que $E \subset \mathcal{C}$.
- ③ Justifier pourquoi cette inclusion est stricte.



○ Exercice 8 (Sur les nombres harmoniques).

On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$E = \left\{ \frac{a}{2b} \mid a \in 2\mathbb{N} + 1, \quad b \in \mathbb{N}^* \right\}$$

① Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists p \in \mathbb{Z}, \quad \exists q \in 2\mathbb{N} + 1, \quad H_{2n} - \frac{H_n}{2} = \frac{p}{q}$$

② En déduire que pour tout $n \geq 2$,

$$H_n \in E \implies (H_{2n} \in E \quad \text{et} \quad H_{2n+1} \in E)$$

③ En déduire que pour tout $n \geq 2$, H_n n'est pas un entier.

Remarque. On désigne par $2\mathbb{N} + 1$ l'ensemble des entiers naturels impairs.

○ Exercice 9.

Donner une forme close de l'ensemble

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, n \right]$$

○ Exercice 10.

On considère l'ensemble $\mathcal{H}$ défini par

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^3 + y^3 < 1 < x + y\}$$

• Montrer que

$$\mathcal{H} \subset]0, 1[\times]0, 1[$$



Exercices supplémentaires

○ Exercice 11.

Soit $\mathcal{M}$ une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes,

- ① $\mathbb{Z} \subset \mathcal{M}$.
- ② Pour tout couple $(x, y) \in \mathcal{M}^2$, on a $x + y \in \mathcal{M}$ et $xy \in \mathcal{M}$.
- ③ $\sqrt{3} + \sqrt{2} \in \mathcal{M}$.

Prouver que $\sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathcal{M}$.

○ Exercice 12 (Une question de dénombrement).

On considère l'ensemble

$$E = \{1, 2, \dots, 2026\}$$

- Déterminer le nombre de parties de E contenant autant de nombres pairs que de nombres impairs.

* *

*

Fin