



Ensembles – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1.

Soit α un nombre réel strictement positif. On considère les ensembles,

$$E = \{x \in \mathbb{R}, \quad |x + 1| < \alpha\} \quad \text{et} \quad F = \left\{x \in \mathbb{R}, \quad |x - 1| < \frac{3}{2}\right\}$$

- ① Justifier que $E \neq \emptyset$.
- ② Déterminer les valeurs de α (s'ils existent) pour lesquelles on a $E = F$.
- ③ Déterminer tous les réels α pour lesquelles les ensembles E et F soient disjoints.

○ Exercice 2 (Une équation d'inconnue ensemble).

Soit E un ensemble non vide et $A, B \subset E$ deux parties de E tels que $A \subset B$.

- Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation

$$X \cap B = X \cup A$$

Remarque. On rappelle que $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de l'ensemble E .

○ Exercice 3 (Sur l'ensemble des parties d'un ensemble).

Soient E et F deux ensembles.

- Montrer que $E \subset F$ si et seulement si $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ puis en déduire que $E = F$ si et seulement si $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$.



○ Exercice 4 (Une loi de composition interne).

On note A l'intervalle $] -1, 1[$. Pour a_1 et a_2 deux éléments de A , on note

$$a_1 * a_2 = \frac{a_1 + a_2}{1 + a_1 a_2}$$

- Montrer que pour tous $a_1, a_2 \in A$, on a

$$1 + a_1 a_2 \neq 0$$

et que $a_1 * a_2 \in A$.

○ Exercice 5 (Explicitement des éléments d'un ensemble).

On note E l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad x^2 - y^2 - x + 3y - 30 = 0\}$$

- Déterminer en extension l'ensemble E .

○ Exercice 6 (Une propriété du produit cartésien).

Soit E un ensemble non vide et $A, B, C, D \subset E$ quatre parties de E non vides.

- Montrer que

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$$

○ Exercice 7 (Produit cartésien et complémentaire).

Pour un ensemble X et une partie Y de X , on désigne par la partie C_X^Y le complémentaire de Y dans X .

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

- Montrer que

$$C_{E \times E}^{A \times B} = (C_E^A \times E) \cup (E \times C_E^B)$$

Indication. Utiliser un raisonnement par équivalences successives.



○ Exercice 8 (Sur le disque unité du plan).

On considère l'ensemble

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- Montrer qu'il n'existe pas de parties $A, B \subset \mathbb{R}$ vérifiant

$$D = A \times B$$

Remarque. Il s'agit bien d'un exemple d'une partie du plan $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas produit cartésien de parties de la droite réelle $\mathbb{R}$.

○ Exercice 9 (Une équation dans $\mathcal{P}(E)$).

Soient $A, B \subset E$ deux parties de E . On considère dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation (χ) définie par

$$(\chi), \quad (A - X) \cup (X - A) = B$$

- ① Donner une condition nécessaire sur le couple (A, B) pour que (χ) admette une solution dans $\mathcal{P}(E)$.
- ② Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation (χ) .

Exercices supplémentaires

○ Exercice 10 (Sur le produit cartésien).

Soient A et B deux ensembles non vides. L'égalité

$$\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$

est-elle vraie en général ?

○ Exercice 11.

Pour un nombre réel λ , on note A_λ l'ensemble

$$A_\lambda = \{x \in \mathbb{R}, \quad |x - \lambda| + |x + \lambda| \leq 2\lambda\}$$

- ① Écrire en extension l'ensemble A_λ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.



② Déterminer une forme close de l'ensemble suivant,

$$\bigcap_{k=1}^{2025} A_k$$

○ Exercice 12.

Soient $a \neq b$ deux entiers naturels non nuls. On considère les deux parties de $\mathbb{R}$ définies par

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \quad x^{a+1} - x^b + 1 = 0\}$$

et

$$B = \{x \in \mathbb{R}, \quad x^{b+1} - x^a + 1 = 0\}$$

- Expliciter $A \cap B$.

* *

*

Fin