



Notions sur la logique et les raisonnements – Série d'exercices 4

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Une implication).

Déterminer tous les nombres réels x pour lesquels

$$(\forall y \in [0, 1]), \quad x \geq y \implies x \geq 2y$$

est toujours vraie.

○ Exercice 2 (Une inégalité classique).

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels strictement positifs.

- Montrer que

$$\left(a_1 + a_2 + \dots + a_n\right) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

○ Exercice 3 (Un exercice d'Arithmétiques).

Soient x et y deux entiers naturels.

- Montrer que l'entier $xy(x^2 - y^2)$ est un multiple de 3.

○ Exercice 4 (Une inégalité).

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs.

- Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{x^{n+2} + y^{n+2}}{x^n + y^n} \geq xy$$



○ Exercice 5.

Soient $\theta_1, \dots, \theta_5$ cinq nombres réels vérifiant

$$|\theta_2 - \theta_1| = 2|\theta_3 - \theta_2| = 3|\theta_4 - \theta_3| = 4|\theta_5 - \theta_4|$$

- Montrer que ces cinq réels sont tous égaux.

○ Exercice 6 (Un produit télescopique).

Simplifier le produit suivant,

$$\prod_{k=2}^{1000} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

○ Exercice 7 (Un produit télescopique 2).

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2 \geq 2n+3$$

○ Exercice 8.

On considère le nombre N défini par

$$N = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 50$$

- ① Déterminer le plus grand entier k tel que 2^k divise N .
- ② Déterminer le plus grand entier l tel que 5^l divise N .
- ③ Par combien de zéros se termine l'écriture décimale du nombre N (en lisant N de gauche à droite) ?

○ Exercice 9 (Une équation trigonométrique).

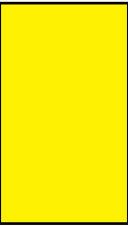
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(T), \quad \cos(2x) + \sin(7x) = -2$$



Exercices supplémentaires

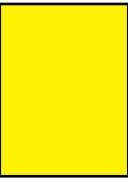
○ Exercice 10 (Sur les produits télescopiques).



Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\prod_{p=1}^n \left(1 + \frac{1}{p^3}\right) < 3$$

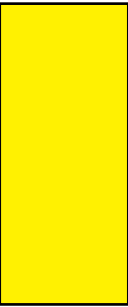
○ Exercice 11 (Une équation fonctionnelle).



Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la relation suivante,

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

○ Exercice 12 (Une inégalité sur les moyennes usuelles).



Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

- Montrer que

$$\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

et caractériser les cas éventuels d'égalité.

* *

*

Fin