



Notions sur la logique et les raisonnements – Série d'exercices 3

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Un système paramétré).

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

$$(S_m), \quad \begin{cases} |2x - y + 3| = 6 \\ |x| + |y - 1| = m \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

○ Exercice 2 (Utilité des quantificateurs).

Soient a, b et c trois nombres réels tels que

$$(\forall x \in [-1, 1]), \quad |ax^2 + bx + c| \leq 1$$

- Montrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$$

○ Exercice 3.

Montrer que si $n + 1$ est un carré parfait, alors $14n + 14$ est somme de trois carrés parfaits.

○ Exercice 4 (Distinction de cas et construction graphique).

On munit le plan d'un repère orthonormé.

- Expliciter puis construire l'ensemble (Γ) des points $M(x, y)$ vérifiant

$$|x| + |y - 1| = 2$$



○ Exercice 5 (Le raisonnement par absurde).

Soit a un entier naturel.

- Montrer que

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{4a^2 + \sqrt{16a^2 + 8a + 3}}} \notin \mathbb{N}$$

○ Exercice 6 (Une équation fonctionnelle).

Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$f(n)^{f(m)} = m^n$$

○ Exercice 7.

Soient a, b et c trois entiers impairs et on considère la fonction polynômiale

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

- Montrer que P n'admet pas de racine dans $\mathbb{Q}$.

○ Exercice 8 (Une équation fonctionnelle).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes vérifiant $f(2) = 2$ et pour tout $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$f(nm) = f(n)f(m)$$

○ Exercice 9 (Un problème de raisonnement).

Il y a deux récipients. Le premier contient 1 litre d'eau, le second est vide. On transvase une moitié de l'eau du premier du premier récipient dans le second; ensuite on transvase un quart de l'eau du premier récipient dans le second, etc.

- Combien d'eau se trouvera dans le premier récipient après la 101-ième transfusion ?

Exercices supplémentaires



○ Exercice 10 (Une construction géométrique).

Construire un triangle si l'on connaît les trois points d'intersection de ses bissectrices avec le cercle circonscrit à ce triangle.

○ Exercice 11 (Une récurrence double).

Soit $\alpha > 1$ solution de l'équation

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note

$$\Gamma_n = \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\Gamma_n \in \mathbb{Z}$.

Indication. Trouver une relation de récurrence entre Γ_{n+2} , Γ_{n+1} et Γ_n .

○ Exercice 12 (Sur les trinômes).

Soient $a > 0$, b et c trois nombres réels. On considère la fonction polynômiale définie par

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on suppose que $b \geq \frac{1}{8a}$.

- Montrer que $P(\Delta) \geq 0$.

○ Exercice 13 (Équation fonctionnelle de Cauchy).

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$(\forall x, y \in \mathbb{Q}), \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

est donnée par $f(r) = ar$ pour tout nombre rationnel r avec a une constante réelle.

* *

*

Fin