



Notions sur la logique et les raisonnements – Série d'exercices 2

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Deux équations).

- ① Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E_1), \quad \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$$

- ② Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E_2), \quad \sqrt{\frac{x+1}{\sqrt{x}-2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{x}-2}{x+1}} + 6 = 0$$

○ Exercice 2 (Autour de la valeur absolue).

On se donne trois nombres réels a, b et c . L'objectif de cet exercice est de montrer l'équivalence

$$\left(|a| < c \quad \text{et} \quad |b| < c \right) \iff \left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| < c$$

- ① Prouver le sens inverse de l'équivalence.

Indication. Utilisez l'inégalité triangulaire sur les valeurs absolues.

- ② Montrer le sens direct de l'équivalence.

Indication. Vous pouvez utiliser un raisonnement par distinction de cas.



○ Exercice 3 (Une inégalité).

Montrer que pour tout nombre réel x , on a

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4} > 0$$

○ Exercice 4 (Une identité sommatoire).

Soit q un nombre réel de l'intervalle $] -1, 1[$.

- Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{1-q^4} + \dots + \frac{q^{2^{n-1}}}{1-q^{2^n}} = \frac{q - q^{2^n}}{(1-q)(1-q^{2^n})}$$

○ Exercice 5 (Un peu d'Arithmétiques).

- ① Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a $3^{3n+2} + 2^{n+4}$ divisible par 25.
- ② Montrer que pour tout entier naturel n , 25 divise $2^{n+2} \times 3^n + 5n - 4$.
- ③ Montrer que si n est un entier impair, alors 16 divise $n^4 - 1$.
- ④ Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier $4n + 3$ n'est pas multiple de 6.
- ⑤ Montrer que pour tout entier naturel n , on a $\sqrt{4n + 2018} \notin \mathbb{N}$.

○ Exercice 6 (Deux inégalités sur les entiers naturels).

Soient n et k deux entiers naturels non nuls.

- ① Montrer que

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$$

où $n!$ désigne la factorielle de n ; c'est-à-dire $n! = 1 \times 2 \dots \times n$.

- ② Prouver que

$$n^k + kn^{k-1} \leq (n+1)^k$$



○ Exercice 7.

Soient a, b et c trois nombres réels tels que

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$$

- Montrer que

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$$

○ Exercice 8 (Un lemme fondamental sur les nombres premiers).

Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.

○ Exercice 9 (Un automate fini).

Un oeuf doit cuire 9 minutes. Comment peut-on compter ce temps à l'aide de deux sabliers de 5 et 7 minutes ?

○ Exercice 10 (Rangement de nombres).

Peut-on mettre en ligne les nombres naturels de 1 à 100 de sorte que la différence entre tout couple de nombres voisins soit supérieure ou égale à 50 (on soustrait le plus petit du plus grand) ?

Exercices supplémentaires

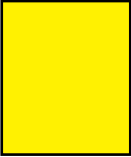
○ Exercice 11 (Un problème de géométrie).

Soit $\triangle ABC$ un triangle isocèle en B . On considère deux points I et J appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que les droites (IJ) et (BC) soient parallèles. Soit K un point du segment $[BC]$.

- Montrer que les droites (JK) et (AB) sont parallèles si et seulement si les deux distances AI et BK sont égales.

○ Exercice 12 (Inégalité de Nesbitt).

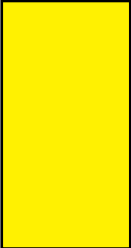
Soient a, b et c trois réels strictement positifs.



- Montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

○ Exercice 13 (Sur les nombres harmoniques).



Pour un entier naturel non nul $n \geq 2$, on note

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

- Montrer que pour tout $n \geq 2$, H_n n'appartient pas à $\mathbb{N}$.

* *

*

Fin