



Notions sur la logique et les raisonnements – Série d'exercices 1

Classe. Première année sciences mathématiques

Compilé par le prof. Saad Choukri

Note. Les exercices donnés dans cette feuille ne sont pas forcément classés suivant leur ordre de difficulté. Cependant, souvent les exercices sont intitulés suivant leurs thèmes. La deuxième partie des exercices rassemble quelques exercices supplémentaires qui sont souvent plus difficiles et nécessitent une compréhension profonde du chapitre correspondant.

○ Exercice 1 (Une inégalité).

Soient a, b et c trois réels de l'intervalle $[2, +\infty[$ tels que $ab \leq c$.

- Montrer que

$$a + b \leq c$$

○ Exercice 2 (Une inéquation).

Soit S_α l'ensemble des nombres réels x vérifiant

$$|\sqrt{x+1} - 1| < \alpha$$

où α est un nombre réel strictement positif.

- Montrer que

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+) (\exists \beta \in \mathbb{R}_*^+), \quad]-\beta, \beta[\subset S_\alpha$$

○ Exercice 3 (Une identité sommatoire).

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2$$

- Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = (-1)^{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2}$$



○ Exercice 4 (Égalité de deux produits).

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\pi_n = \prod_{k=1}^n (n+k), \quad P_n = 2^n \times \prod_{k=1}^n (2k-1)$$

- Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\pi_n = P_n$.

○ Exercice 5 (Autour des sommes géométriques).

Pour un entier $n \geq 1$, on note

$$a_n = \underbrace{77 \dots 7}_{n \text{ fois}}$$

c'est-à-dire a_n est l'entier dont l'écriture dans la base décimale est décrite par n chiffres tous égal à 7.

- ① Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$a_n = \frac{7}{9} \times (10^n - 1)$$

- ② Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{7}{81} \times (10^{n+1} - 9n - 10)$$

○ Exercice 6 (Deux inégalités classiques).

Soient $n, m \geq 2$ deux entiers naturels.

- ① Montrer que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$$

- ② Prouver que

$$m < n \implies n^m < m^n$$



○ Exercice 7.

Soient α et β deux réels de l'intervalle $[0, 1]$. On pose $a = \alpha\beta$, $b = \alpha(1 - \beta) + \beta(1 - \alpha)$ et $c = (1 - \alpha)(1 - \beta)$.

① (a) Montrer que

$$b \geq 2\sqrt{a} - 2a$$

(b) Montrer que $1 - c = b + a$

② En raisonnant par absurde, prouver que l'un des trois réels a , b et c est $\geq 4/9$.

○ Exercice 8 (Une équation dans $\mathbb{R}^2$).

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation (E),

$$(E), \quad \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2}$$

d'inconnu (x, y) .

○ Exercice 9 (Une inéquation dans $\mathbb{R}^2$).

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation (I),

$$(I), \quad |x+y| < |1+xy|$$

d'inconnu (x, y) .

○ Exercice 10 (Le raisonnement par absurde).

Soit a un nombre réel positif tel que

$$a^4 + 8a^3 + 18a^2 + 8a - 3 > 0$$

- En utilisant un raisonnement par absurde, prouver que

$$a > \sqrt{3 + \sqrt{3}} - 2$$



Exercices supplémentaires

○ Exercice 11 (Une inéquation fonctionnelle).

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction vérifiant pour tout $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, la condition

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

On suppose de plus que $f(0) = 0$.

- Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) = x$.

○ Exercice 12 (Sur la somme des inverses des carrés).

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\frac{3n}{2n+1} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$$

○ Exercice 13.

On choisit des éléments $x_1, \dots, x_{2025}$ différents deux à deux de l'ensemble $\{1, 2, \dots, 2025\}$.

- Montrer que le produit

$$\prod_{k=1}^{2025} (x_k - k)$$

est toujours pair.

* *

*

Fin